Durácia kupónovej obligácie ako kritérium cenovej citlivosti obligácie vzhľadom na zmenu úrokových sadzieb

*Vincent ŠOLTÉS**

Duration of Coupon Bonds as a Criterion of the Price Sensibility of Bonds with Regards to the Change of Interest Rates

Abstract

Duration of bonds can be used multiplexly. There is formula found from which follows that duration of bonds is a measure of price sensitivity of bonds on change of market interest rate. Furthermore new formula which makes the calculation of duration much casier is derived. Advantage of this new formula is that it does not carry the sum in the aspect of time to maturity.

Key words: *duration, coupon bonds, price sensibility, interest rate*

JEL Classification: C41, G31

Úvod

V príspevku sa analyzuje pojem *durácia kupónovej obligácie*. Durácia obligácie je charakteristika, ktorej znalosť by mala byť pre investora do obligácií samozrejmosťou, pretože jej využitie je viacnásobné. Ak uvažujeme finančné aktívum, ktoré generuje nejakú postupnosť platieb (napríklad kupónovú obligáciu), potom durácia je priemerná doba splatnosti tohto finančného aktíva. Durácia teda dáva investorovi informáciu, kedy sa mu vrátia prostriedky investované do daného finančného inštrumentu.

Z ekonomickej literatúry je známe i tvrdenie, že durácia je aj mierou cenovej citlivosti obligácie na zmenu trhovej úrokovej sadzby. Tento fakt sa v praxi intenzívne využíva. Keďže z definície durácie tento fakt vôbec nevyplýva, jeden z cieľov nášho príspevku je ukázať, že je to naozaj tak.

* prof. RNDr. Vincent ŠOLTÉS, CSc., Technická univerzita v Košiciach, Ekonomická fakulta Katedra financií, B. Němcovej 32, 040 01 Košice; e-mail: vincent.soltes@tuke.sk

Treba poznamenať, že okrem tzv. Macaulayho durácie sa v praxi často (možno aj častejšie) využíva tzv. *modifikovaná durácia*. Ak však poznáme duráciu D daného finančného aktíva, potom ľahko dostaneme modifikovanú duráciu D_m, a naopak, pretože

$$D_m = \frac{D}{1+i} \quad \text{resp.} \quad D = D_m(1+i)$$

Hoci v ďalšom texte sa budeme venovať durácii, odvodený vzorec možno použiť aj na modifikovanú duráciu, pretože výsledok stačí vydeliť výrazom $(1 + i)$. Keďže ukážeme, že durácia je naozaj mierou citlivosti obligácie na zmenu úrokovej sadzby, je možné konštatovať, že táto charakteristika je významná pri riadení portfólia či už podielových fondov (pozri napr. [5]), ale aj dôchodkových fondov (pozri napr. [6]).

Ďalším cieľom tohto príspevku je odvodenie nového vzorca na výpočet kupónovej obligácie. Okrem toho, že je jednoduchší, možno ho využiť aj na analýzu vplyvu doby splatnosti na veľkosť durácie, čo doteraz známy vzorec neumožňuje.

1. Využitie durácie na výpočet teoretickej ceny obligácie pri zmene trhovej úrokovej sadzby

Vieme, že *dlhopis* je cenný papier, s ktorým je spojené právo majiteľa na vyplácanie výnosov k určitým dátumom a splatenie jeho nominálnej hodnoty k určitému dátumu. Emitent dlhopisu má samozrejme povinnosť tieto záväzky splniť.

Obligácie sú dlhopisy s dlhšou dobou splatnosti. *Kupónové obligácie* sú obligácie s pevnou kupónovou sadzbou, teda výnosy z nich sú konštatné.

Uvažujme obligáciu s nominálnou hodnotou F, kupónovou sadzbou r, dobou splatnosti obligácie n rokov a požadovanou mierou výnosu i.

Durácia takejto obligácie sa definuje ako vážený priemer dôb splatnosti $t = 1, 2, ..., n$ jednotlivých finančných tokov spojených s obligáciou, pričom váhy sú jednotlivé diskontované finančné toky vydelené celkovou teoretickou cenou obligácie. Takto definovanú duráciu (tzv. Macaulayho duráciu) vypočítame zo vzťahu

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot \frac{Fr}{(1+i)^t} + n \cdot \frac{F}{(1+i)^n}}{V} \tag{1}$$

pričom

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{Fr}{(1+i)^t} + \frac{F}{(1+i)^n} \tag{2}$$

je teoretická cena obligácie.

Teraz ukážeme, ako durácia súvisí so zmenou teoretickej ceny obligácie pri zmene trhovej úrokovej sadzby. Vypočítajme najprv zo vzťahu (2) parciálnu deriváciu podľa i. Máme

$$\frac{\partial V}{\partial i}=\sum_{t=1}^{n}-t\cdot\frac{Fr}{(1+i)^{t+1}}-n\cdot\frac{F}{(1+i)^{n+1}}=-\frac{1}{1+i}\left(\sum_{t=1}^{n}t\cdot\frac{Fr}{(1+i)^{t}}+n\cdot\frac{F}{(1+i)^{n}}\right)$$

odkiaľ vydelením obidvoch strán teoretickou cenou V máme

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial i}}{V}=\frac{-\frac{1}{1+i}\left(\sum_{t=1}^{n}t\cdot\frac{Fr}{(1+i)^{t}}+n\cdot\frac{F}{(1+i)^{n}}\right)}{V}=-\frac{D}{1+i} \tag{3}$$

Keďže výraz na ľavej strane je relatívna zmena teoretickej ceny obligácie pri zmene trhovej úrokovej sadzby, vzťah (3) nám dokazuje, že durácia je naozaj kritériom citlivosti zmeny teoretickej ceny obligácie pri zmene trhovej úrokovej sadzby.

Zo vzťahu (3) vyplýva, že pri zmene trhovej úrokovej sadzby je relatívna zmena teoretickej ceny obligácie priamo úmerná durácii tejto obligácie. Keďže zo vzťahu (2) vyplýva, že pri raste trhovej úrokovej sadzby teoretická cena obligácie klesá, a naopak, pri poklese trhovej úrokovej sadzby teoretická cena obligácie rastie, zo vzťahu (3) vyplýva, že relatívny pokles, resp. nárast teoretickej ceny je tým väčší, čím väčšia je durácia tejto obligácie. Obligácie s väčšou duráciou sú teda citlivejšie na zmenu trhovej úrokovej sadzby ako obligácie s menšou duráciou.

Ak je teda reálny predpoklad, že úrokové sadzby budú klesať, potom je zrejmé, že ceny obligácií budú rásť. V tomto prípade by sme mali uprednostniť obligácie s vyššou duráciou, pretože relatívna zmena ich ceny by mala byť väčšia.

Ak naopak očakávame nárast úrokových sadzieb, potom by sme mali očakávať aj pokles cien obligácií. Relatívny pokles cien by mal byť menší pri obligáciách s menšou duráciou.

Durácia obligácie je teda charakteristika, podľa ktorej môžeme vyberať obligácie s potrebnou citlivosťou na zmenu trhovej úrokovej sadzby.

2. Odvodenie nového vzorca na výpočet durácie kupónovej obligácie

Duráciu obligácie môžeme vypočítať podľa známeho vzorca (1), avšak najmä pre obligácie s veľkou dobou splatnosti n je výpočet veľmi zdĺhavý. Ďalšou jeho nevýhodou je skutočnosť, že nie je z neho možné zistiť vplyv doby splatnosti n na veľkosť durácie obligácie. Tieto nedostatky odstraňuje vzorec, ktorý teraz odvodíme.

Upravme najprv vzťah (1) tak, že v čitateli aj v menovateli vyberieme pred zátvorku konštantný člen $F.r$, ktorý potom vykrátime.

Zavedením substitúcie $x = \dfrac{1}{1+i}$ do takto upraveného vzťahu (1) máme

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot x^{t} + \frac{n}{r} \mathrm{x}^{n}}{\sum_{t=1}^{n} x^{t} + \frac{1}{r} \mathrm{x}^{n}}$$

resp.

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot x^{t-1} + \frac{n}{r} \mathrm{x}^{n-1}}{\sum_{t=1}^{n} x^{t-1} + \frac{1}{r} \mathrm{x}^{n-1}}$$

Keďže v menovateli je súčet n členov geometrickej postupnosti, pričom $a_1 = 1$ a kvocient $q = x$, máme

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot x^{t-1} + \frac{n}{r} \mathrm{x}^{n-1}}{\frac{1-x^{n}}{1-x} + \frac{1}{r} \mathrm{x}^{n-1}}$$

Postupnosť v čitateli $\sum_{t=1}^{n} t \cdot x^{t-1} = 1 + 2x + 3x^{2} + \ldots + nx^{n-1}$ nie je geometrická, avšak integrovaním máme $\int \sum_{t=1}^{n} t \cdot x^{t-1} dx = x + x^{2} + x^{3} + \ldots + x^{n}$, čo už je geometrická postupnosť, kde $a_1 = x$, $q = x$.

Je teda

$$\sum_{t=1}^{n} t \cdot x^{t-1} = \left[x \left(\frac{1-\mathrm{x}^{n}}{1-x} \right) \right]' = \left[\frac{x - x^{n+1}}{1-x} \right]' = \frac{\left(1-(n+1)x^{n}\right)\left(1-\mathrm{x}\right) + \left(x - x^{n+1}\right)}{(1-x)^{2}} =$$

$$= \frac{1-(n+1)x^{n} + nx^{n+1}}{(1-x)^{2}}$$

čiže

$$D = \frac{\frac{1-(n+1)x^{n} + nx^{n+1}}{(1-x)^{2}} + \frac{n}{r} \mathrm{x}^{n-1}}{\frac{1-x^{n}}{1-x} + \frac{1}{r} \mathrm{x}^{n-1}}$$

Keďže $x = \dfrac{1}{1+i}$, potom $1 - x = 1 - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{i}{1+i}$ a dosadením do posledného vzťahu máme

$$D = \frac{\dfrac{1-(n+1)\dfrac{1}{(1+i)^n}+n\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^{n+1}}}{\dfrac{i^2}{(1+i)^2}}+\dfrac{n}{r}\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^{n-1}}}{\dfrac{1-\dfrac{1}{(1+i)^n}}{\dfrac{i}{1+i}}+\dfrac{1}{r}\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^{n-1}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(1+i)^2}{i^2}\left[\dfrac{(1+i)^{n+1}-(n+1)(1+i)+n}{(1+i)^{n+1}}+\dfrac{n\,i^2}{r}\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^{n+1}}\right]}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\left[\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}+\dfrac{i}{r}\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^n}\right]}$$

odkiaľ jednoduchou úpravou dostaneme, že

$$D = \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n+1}+n\,\mathrm{i}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{r}}-1\right)-(1+i)}{(1+i)^n+\dfrac{i}{r}-1}\right] \tag{4}$$

Príklad

Trhová úroková sadzba je 0,1 a na trhu je možné kúpiť za teoretickú cenu obligácie s parametrami F_1 = 100 000, r_1 = 0,12, n_1 = 10 a obligácie s parametrami F_2 = 100 000, r_2 = 0,11 a n_2 = 8. Ak predpokladáme pokles úrokových sadzieb, ktoré z obligácií sú vhodnejšie na investovanie?

Riešenie

Keďže predpokladáme pokles úrokových sadzieb, dá sa očakávať nárast cien obligácií. Vhodnejšie na investovanie budú tie obligácie, pri ktorých sa predpokladá väčšia relatívna zmena ceny. Vzhľadom na uvedené to budú obligácie s väčšou duráciou.

Použijúc vzťah (4) máme

$$D_1 = \frac{1}{0{,}1}\left[\frac{(1{,}1)^{11} + 10 \cdot 0{,}1\left(\frac{0{,}1}{0{,}12} - 1\right) - 1{,}1}{1{,}1^{10} + \frac{0{,}1}{0{,}12} - 1}\right] = 6{,}536$$

a

$$D_2 = \frac{1}{0{,}1}\left[\frac{1{,}1^{9} + 8 \cdot 0{,}1\left(\frac{0{,}1}{0{,}11} - 1\right) - 1{,}1}{1{,}1^{8} + \frac{0{,}1}{0{,}11} - 1}\right] = 5{,}774$$

teda vhodnejšie sú v tomto prípade desaťročné obligácie.

Ak by sme vzťah (4) nepoznali a na výpočet durácie by sme použili len doteraz známu definíciu, potom by výpočet durácií oboch obligácií bol neporovnateľne prácnejší. Počítajme teraz duráciu D_1 pomocou vzťahu (1) a čiastočné hodnoty zapíšme do tabuľky 1.

Tabuľka 1

Čas *t*	**Kupón a nominálna hodnota**	**Diskontovaný kupón a nominálna hodnota**	**Vážený diskontovaný kupón a nominálna hodnota**
1	**2**	**3 = 2/(1,1)^t**	**4 = 3.1**
1. rok	12 000	10 909.0910	10 909.091
2. rok	12 000	9 917.3554	19 834.711
3. rok	12 000	9 015.7776	27 047.333
4. rok	12 000	8 196.1615	32 784.646
5. rok	12 000	7 451.0559	37 255.279
6. rok	12 000	6 773.6910	40 642.146
7. rok	12 000	6 157.8883	43 105.218
8. rok	12 000	5 598.0855	44 784.684
9. rok	12 000	5 089.1664	45 802.498
10. rok	112 000	43 180.889	431 808.890
$\sum_{t=1}^{10}$		112 289.160	733 974.500

Z tabuľky a vzťahu (1) máme, že

$$D_1 = \frac{733\,974{,}5}{112\,289{,}16} = 6{,}536$$

Analogicky zapíšme čiastočné hodnoty potrebné na výpočet durácie druhej aplikácie pomocou vzťahu (1) do tabuľky 2.

Z tabuľky 2 máme, že

$$D_2 = \frac{608\,205{,}21}{105\,334{,}89} = 5{,}774$$

Tabuľka 2

Čas t	Kupón a nominálna hodnota	Diskontovaný kupón a nominálna hodnota	Vážený diskontovaný kupón a nominálna hodnota
1	2	$3 = 2/(1,1)^t$	4 = 3.1
1. rok	11 000	10 000	10 000
2. rok	11 000	9 090.9091	18 181.818
3. rok	11 000	8 264.4628	24 793.388
4. rok	11 000	7 513.1480	30 052.592
5. rok	11 000	6 830.1346	34 150.673
6. rok	11 000	6 209.2167	37 255.300
7. rok	11 000	5 644.7309	39 513.116
8. rok	111 000	51 782.2910	414 258.320
$\sum_{t=1}^{8}$		105 334.8900	608 205.210

Záver

Z toho, čo sme uviedli, je zrejmé, že nami odvodený vzorec (4) na výpočet durácie obligácie značne uľahčuje jej výpočet. Oceníme ho najmä pri obligáciách s väčšou dobou splatnosti.

Nie je to však jeho jediná výhoda. V ďalšom príspevku ukážeme, že pomocou neho je možné dokázať aj ďalšie známe, ale doposiaľ nedokázané tvrdenia o obligáciách.

Literatúra

[1] HRVOĽOVÁ, B.: Analýza finančných trhov. Bratislava: SPRINT vfra 2001.
[2] MARKOVIČ, P.: Durácia a portfólio cenných papierov. Burza, 2000, č. 6, s. 46 – 48.
[3] MARKOVIČ, P.: Stanovanie vnútornej hodnoty dlhopisu. Burza, 2001, č. 1, s. 50 – 52.
[4] ŠOLTÉS, V. – PENJAK, V.: Finančná matematika. Košice: Košická tlačiarenská, a. s. 2003.
[5] http://www.uniscr.cz/
[6] http://www.employment.gov.sk/