

Stromy rozhodovania, diagramy vplyvu a analýza rozhodovania

Milan TEREK*

Úvod

Denne je nevyhnutné prijímať rozhodnutia, riešiť problémy rozhodovania, ktoré sú niekedy zložité.

Analýza rozhodovania poskytuje štruktúru a metódy na systematickú analýzu problémov rozhodovania. Spolu s rámcom na uvažovanie o problémoch rozhodovania poskytuje analýza rozhodovania analytické nástroje, ktoré môžu proces rozhodovania zjednodušiť.

1. Problémy rozhodovania a analýza rozhodovania

V prezentovanom článku sa budeme venovať problémom rozhodovania spočívajúcim vo výbere jednej aktivity (jedného variantu riešenia reálneho problému) z množiny aktivít, ktoré prichádzajú do úvahy.

Analýza rozhodovania uľahčuje orientáciu v problémoch rozhodovania. Podľa R. L. Kennedyho a H. Raiffu [10] analýza rozhodovania je preskripčný prístup, ktorý umožňuje priemerne inteligentným ľuďom uvažovať systematicky o niektorých zložitých, dôležitých, reálnych problémoch.

Analýza rozhodovania teda poskytuje istý štruktúrny rámec a návody na systematické uvažovanie pri riešení zložitých problémov rozhodovania.

Techniky analýzy rozhodovania vedú obyčajne k nájdeniu lepších riešení problému. Môže vzniknúť otázka, čo sú *lepšie riešenia*?

Najjednoduchšou odpoveďou by mohlo byť, že sú to také riešenia, ktoré poskytujú najlepšie výsledky [4], aj keď pri rozhodovaní v podmienkach neurčitosti môže byť takáto definícia problematická. Možno by bolo lepšie povedať, že sú to také riešenia, o ktorých sa v čase prijímania rozhodnutia nazdávame, že poskytnú najlepšie výsledky.

Dôležitými vstupnými údajmi v procese aplikácie analýzy rozhodovania sú často subjektívne úsudky o neurčitosti a o hodnotách niektorých parametrov problému.

* doc. Ing. Milan TEREK, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra štatistiky, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava 5

Metódy analýzy rozhodovania teda umožňujú zahrnúť do formálnej analýzy aj subjektívne úsudky. To je zaiste výhoda, pretože ľudské skúsenosti a intuíciu možno ťažko nahradiť ničím iným, na druhej strane však treba zobrať do úvahy fakt, že človek je niekedy „veľmi nedokonalý zdroj informácií“. Analýza rozhodovania však poskytuje aj postupy, ktoré uľahčujú orientáciu a určitú sebakontrolu človeka, jeho vlastných subjektívnych úsudkov.

Analýza rozhodovania je založená na poznatkoch *teórie štatistického rozhodovania*, ktorá sa zaoberá teóriou rozhodovania v podmienkach neurčitosti, keď sú k dispozícii štatistické informácie, ktoré umožňujú niektoré aspekty neurčitosti zahrnúť do formálnej analýzy problémov rozhodovania [1].

Prijmeme predpoklad, že neurčitosť možno z formálno-matematickej stránky zahrnúť do formálnej analýzy prostredníctvom neznámej kvantitatívnej veličiny, ktorú označíme θ .

Analýzu rozhodovania možno potom definovať ako súhrn metód rozhodovania, ktoré sú založené na teórii štatistického rozhodovania.

Analýza rozhodovania zahŕňa predovšetkým metódy tzv. *bayesovského rozhodovania*, ktoré sú založené na *teórii bayesovského rozhodovania*, preto sa niekedy nerozlišuje medzi analýzou rozhodovania a bayesovským rozhodovaním. Existuje aj *teória nebayesovského rozhodovania*, ktorá však väčšinou zostáva v teoretickej rovine.

Z hľadiska štatistiky možno bayesovské rozhodovanie (analýzu rozhodovania) považovať za súčasť *bayesovskej analýzy*, ktorú možno jednoducho definovať ako taký prístup k štatistike, ktorý vo formálnej analýze využíva tzv. *apriórnu informáciu*. Je to informácia o kvantitatívnej veličine θ , ktorá nepochádza z výberového zisťovania. Obyčajne vyplýva z minulých skúseností s riešením podobných problémov.

Experimentálnou informáciou nazveme ľubovoľnú informáciu, ktorá môže zmeniť štruktúru neurčitosti v súvislosti s výskytom neurčitých udalostí. Jedným typom experimentálnej informácie je informácia z výberových experimentov (výberová informácia alebo informácia z výberu). V teórii štatistického rozhodovania sa kombinuje experimentálna informácia s inými relevantnými aspektmi problému, s cieľom nájsť najlepšie rozhodnutie.

Prvým zdrojom neexperimentálnej informácie, ktorá sa vo formálnej analýze berie do úvahy, sú poznatky o možných dôsledkoch rozhodnutí, ktoré možno často kvantifikovať pomocou straty (alebo výnosu), priradenej každému z možných rozhodnutí pre rôzne hodnoty θ . Poznamenajme, že stratu možno chápať ako záporný výnos a výnos ako zápornú stratu.

Druhým zdrojom neexperimentálnej informácie v bayesovskej teórii rozhodovania je *apriórna informácia*.

2. Základné aspekty problémov rozhodovania

Pri rozhodovaní v podmienkach neurčitosti sa obyčajne uvažujú štyri základné aspekty: možné aktivity; možné stavy prírody; dôsledky (straty alebo výnosy) pre všetky kombinácie aktivít a stavov prírody; apriórna informácia o možných stavoch prírody.

1. Rozhodnutia (varianty riešenia problému) budeme nazývať *aktivitami* a označovať a . Množinu všetkých možných aktivít, ktoré uvažujeme, budeme označovať A .

2. Neznámu veličinu θ , ktorá ovplyvňuje proces rozhodovania, nazveme *stav prírody*. Množinu všetkých možných stavov prírody, ktoré uvažujeme, označíme Θ .

Keď sa experimenty realizujú s cieľom získať informácie o θ , spravidla predpokladáme, že pozorovania majú niektoré z teoretických rozdelení pravdepodobnosti a θ je neznámy parameter tohto rozdelenia. Vtedy budeme θ nazývať parametrom a Θ parametrickým priestorom.

3. Všimnime si tretí základný aspekt problému rozhodovania – modelovanie dôsledkov rozhodnutí.

Všeobecne možno uviesť, že *stratová funkcia* L je definovaná pre všetky dvojice $(\theta, a) \in \Theta \times A$. Nech θ_i je konkrétny stav prírody a a_j je konkrétna aktivita. Potom $L(\theta_i, a_j)$ je zodpovedajúca strata.

Podobne možno uvažovať výnosovú funkciu. Výnosová funkcia V je definovaná pre všetky dvojice $(\theta, a) \in \Theta \times A$.

Budeme uvažovať len konečné straty a výnosy, ktoré sú vyjadrené v peňažných jednotkách.

4. Nakoniec si všimnime posledný základný aspekt problému rozhodovania, keď uvažujeme bayesovskú analýzu.

Budeme predpokladať, že máme predbežnú predstavu o rozdelení pravdepodobnosti na Θ (poznáme apriórne rozdelenie pravdepodobnosti na Θ).

Apriórne rozdelenie budeme označovať $\pi(\theta)$ bez ohľadu na to, či ide o spojité, alebo diskrétné rozdelenie. Uvedieme dnes už „klasický“ príklad (z [12], upravený) riešenia problému rozhodovania, v ktorom je potrebné prijať niekoľko rozhodnutí za sebou.

Príklad 1

Je potrebné rozhodnúť, či sa na určitom „nádejnom mieste“ má uskutočniť ťažobný vrt. Rozhodovateľ má k dispozícii výsledky analýzy, na základe ktorej možno predpokladať, že vrt bude úspešný s pravdepodobnosťou 0,5 a vtedy možno očakávať čistý výnos 20 000 000,- Sk. S pravdepodobnosťou 0,5 vrt nebude úspešný a možno očakávať stratu 5 000 000,- Sk.

Pre rozhodovateľa existuje aj iná možnosť – získať experimentálne informácie.

1. Uskutočniť dodatočný geologický prieskum s nákladom 600 000,- Sk. Na základe skúseností s podobným prieskumom možno očakávať, že keď je miesto vhodné na ťažobný vrt, prieskum to potvrdí s pravdepodobnosťou 0,8; keď miesto nie je vhodné, výsledky prieskumu budú s pravdepodobnosťou 0,3 naznačovať úspešnosť vrtu.

2. Uskutočniť dôkladnejší geologický prieskum, ktorý je však aj drahší – stojí 700 000 Sk. Možno očakávať, že keď je miesto vhodné na ťažobný vrt, výsledky prieskumu to potvrdia s pravdepodobnosťou 0,9; keď je miesto nevhodné, výsledky prieskumu budú s pravdepodobnosťou 0,3 naznačovať úspešný vrt.

Sú známe viaceré nástroje na štrukturalizáciu problémov rozhodovania. Vhodnosť použitia každého z nich závisí od charakteru konkrétneho problému.

Niektoré problémy rozhodovania možno štrukturalizovať pomocou tabuľky výnosov (*payoff table*) alebo tabuľky strát.¹ Tento problém, ako aj problémy rozhodovania s podobnou štruktúrou, možno štrukturalizovať pomocou stromu rozhodovania alebo pomocou tzv. *diagramu vplyvu* (*influence diagram*). Všimneme si hlavne diagramy vplyvu, ktoré sú v našej literatúre zatiaľ málo známe a pokúsime sa o ich porovnanie so stromami rozhodovania.

Množinu možných aktivít a množinu možných stavov prírody možno zrejme v probléme z príkladu 1 definovať takto:

$$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}, \quad \Theta = \{U, \bar{U}, V, \bar{V}\}$$

kde

a_0 – neuskutočniť dodatočný geologický prieskum,

a_1 – uskutočniť dodatočný geologický prieskum s nákladmi 600 000,- Sk,

a_2 – uskutočniť dodatočný geologický prieskum s nákladmi 700 000,- Sk,

a_3 – uskutočniť ťažobný vrt,

a_4 – neuskutočniť ťažobný vrt,

U – prieskum signalizuje úspešnosť vrtu,

\bar{U} – prieskum nesignalizuje úspešnosť vrtu,

V – ťažobný vrt je úspešný,

\bar{V} – ťažobný vrt nie je úspešný.

3. Stromy rozhodovania a diagramy vplyvu

Keďže terminológia v oblasti teórie grafov nie je jednotná, budeme najprv definovať niektoré pojmy z teórie grafov, ktoré budeme používať.

Graf G možno definovať ako množinu uzlov a hrán, ktoré ich spájajú.

¹ Niektorí autori používajú namiesto termínu *tabuľka výnosov* termín *výplatná tabuľka* alebo *tabuľka výplat*.

V *orientovanom grafe* sú všetky hrany orientované. V *neorientovanom grafe* sú všetky hrany neorientované.

Sled S dĺžky n (n je celé nezáporné číslo) grafu G z uzla u_0 do uzla u_n je konečná, alternujúca postupnosť uzlov u_i ($i = 0, 1, \dots, n$) a hrán h_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$S = \{u_0, h_1, u_1, h_2, \dots, h_n, u_n\}$$

Keď uzol u_{i-1} je začiatočným uzlom hrany, h_i a u_i je koncovým uzlom tejto hrany, nezveme takýto sled *orientovaným*. Keď každá hrana h_i spája uzly u_{i-1} a u_i (v prípade orientovanej hrany neprihliadame na jej orientáciu), hovoríme o *neorientovanom slede*.

Orientovaný sled, v ktorom sa každý uzol objavuje najviac raz, nazveme *orientovanou cestou*. Neorientovaný sled, v ktorom sa každý uzol objavuje najviac raz, nazveme *neorientovanou cestou*.

Orientovaný sled, ktorý sa začína aj končí v tom istom uzle, pričom všetky ostatné uzly sú rôzne, a v ktorom sa každá hrana objavuje najviac raz, nazveme *cyklom*. Neorientovaný sled, ktorý sa začína aj končí v tom istom uzle, pričom všetky ostatné uzly sú rôzne, a v ktorom sa každá hrana objavuje najviac raz, nazveme *kružnicou*.

Graf bez cyklov a kružníc budeme nazývať *acyklickým grafom*.

Graf budeme nazývať *súvislým*, keď medzi ľubovoľnými dvomi jeho uzlami existuje neorientovaná cesta.

Konečný, súvislý, acyklický graf nazveme *strom*.

Budeme hovoriť, že uzol, ktorý na ceste predchádza nejaký iný uzol, je jeho *predchodcom*. Uzol, ktorý na ceste nasleduje nejaký iný uzol, nazveme jeho *nasledovníkom*.

Začiatočný uzol orientovanej hrany je *bezprostredným predchodcom* jej koncového uzla. Koncový uzol orientovanej hrany je *bezprostredným nasledovníkom* jej začiatočného uzla.

3.1. Stromy rozhodovania

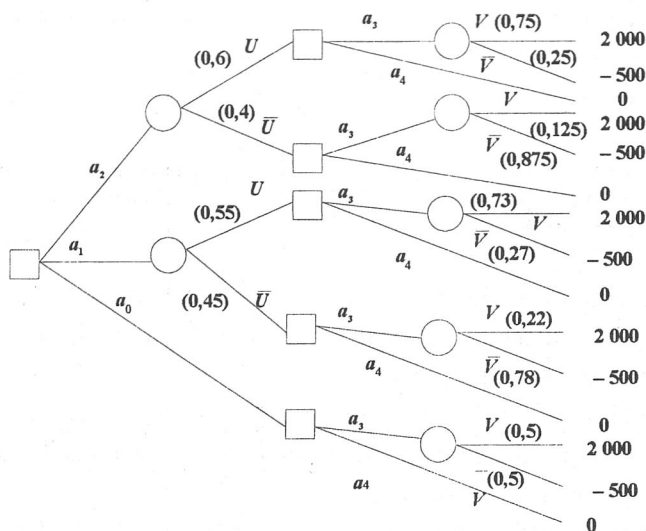
Stromy rozhodovania sú v našej literatúre dostatočne známe (pozri napr. v [21; 22]), preto nebudeme uvádzať zásady ich formulácie, ani algoritmus riešenia príslušných problémov rozhodovania. Uvedieme len strom rozhodovania problému z príkladu 1 (na obr. 1). Na obrázku sú výnosy v desaťtisícoch korún, pravdepodobnosti sú v zátvorkách.

Všimnime si v strome napríklad vetvu, ktorá sa začína hranou a_2 . Keď sa rozhodovateľ rozhodne uskutočniť drahší dodatočný geologický prieskum, privedie ho hrana a_2 do situačného uzla, kde už „rozhoduje náhoda“. Prieskum buď bude, alebo nebude signalizovať úspešnosť vrtu. Rozhodovateľ sa bude musieť rozhodnúť,

či uskutoční, alebo neuskutoční ťažobný vrt. Keď sa rozhodne pre realizáciu ťažobného vrtu, ocitne sa opäť v situačnom uzle. Ak bude vrt úspešný, získa 20 000 000,- Sk, ak bude neúspešný, stratí 5 000 000,- Sk.

Obrázok 1

Štrukturalizácia problému z príkladu 1 pomocou stromu rozhodovania (výnosy sú v desaťtisícoch Sk)



Ďalším užitočným nástrojom na štrukturalizáciu problémov rozhodovania sú tzv. diagramy vplyvu.

3.2. Diagramy vplyvu

Diagram vplyvu umožňuje jednoduché grafické zobrazenie problému rozhodovania. V diagrame vplyvu štvorec reprezentuje rozhodnutia (rozhodovací uzol), kružnica reprezentuje situáciu s neurčitým výsledkom (situačný uzol) a zdvojený obdĺžnik so zaoblenými hranami reprezentuje výnosy (hodnotový uzol).

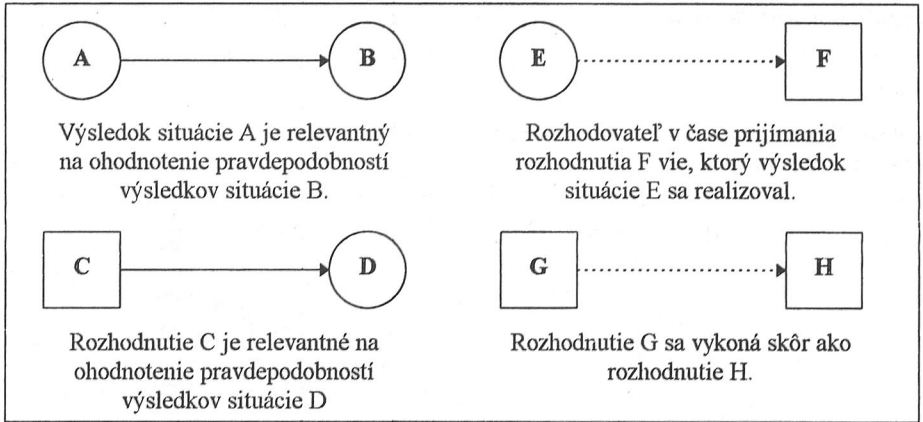
Pri konštrukcii diagramu vplyvu je všeobecne nevyhnutné rešpektovať pravidlá naznačené na obrázku 2.

V diagrame vplyvu možno použiť dva druhy orientovaných hrán.

Plná orientovaná hrana sa končí v situačnom alebo hodnotovom uzle. Keď sa končí v situačnom uzle, reprezentuje relevantnosť. To znamená, že uzol – bezprostredný predchodca – je relevantný na ohodnotenie pravdepodobností výsledkov situačného uzla (všetkých možných stavov prírody θ_i – prvkov konečnej množiny Θ všetkých možných stavov prírody, ktoré môžu byť výsledkom neurčitej situácie, reprezentovanej situačným uzlom), ktorý ho bezprostredne nasleduje.

Obrázok 2

Význam hrán v diagrame vplyvu



Čiarkovaná orientovaná hrana, ktorá sa končí v rozhodovacom uzle, reprezentuje informáciu. To znamená, že v čase prijímania rozhodnutia je známy výstup z uzla – bezprostredného predchodcu.

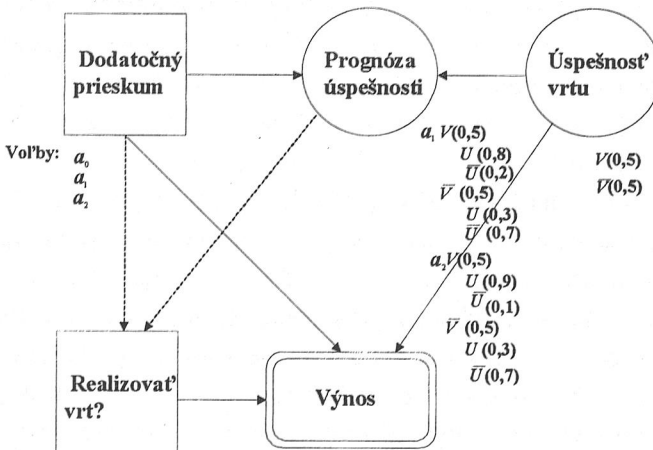
Niekedy je užitočné zaradiť do diagramu tzv. *deterministické uzly* (symbolizované obyčajne dvoma sústrednými kružnicami), ktoré jednoducho agregujú výsledky z niektorých uzlov – predchodcov.

Korektné formulovaný diagram vplyvu neobsahuje cykly. V diagrame vplyvu sa uvádzajú aj všetky voľby, ktoré súvisia s príslušnými rozhodovacími uzlami, všetky výsledky, ktoré súvisia so situačnými uzlami spolu s pravdepodobnosťami ich nastatia a výnosy, ktoré súvisia s hodnotovými uzlami.

Na obrázku 3 je diagram vplyvu problému rozhodovania z príkladu 1.

Obrázok 3

Diagram vplyvu problému z príkladu 1



4. Podmiienený Bayesov princíp rozhodovania a hľadanie optimálneho rozhodnutia

Uvedieme formálnu metódu, ktorá umožňuje nájsť optimálne (vzhľadom na bayesovskú očakávanú stratu, resp. na bayesovský očakávaný výnos) rozhodnutie.

Budeme predpokladať, že poznáme aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti $\pi(\theta|x)$.

Keď $\pi(\theta|x)$ je aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti θ potom *aposteriórna bayesovská očakávaná strata* $\rho(\pi(\theta|x), a)$ je

$$\rho(\pi(\theta|x), a) = E^{\pi(\theta|x)}[L(\theta, a)]$$

Ide o strednú hodnotu stratovej funkcie $L(\theta, a)$, keď aposteriórne rozdelenie je $\pi(\theta|x)$. Keď $\pi(\theta|x)$ je aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti θ , potom *aposteriórny bayesovský očakávaný výnos* $v(\pi(\theta|x), a)$ je

$$v(\pi(\theta|x), a) = E^{\pi(\theta|x)}[V(\theta, a)]$$

Ide o strednú hodnotu výnosovej funkcie $V(\theta, a)$, keď aposteriórne rozdelenie je $\pi(\theta|x)$.

Pri aplikácii Bayesovho podmiieneného princípu rozhodovania sa postupuje takto.

Nájde sa aktivita $a \in A$, ktorá minimalizuje $\rho(\pi(\theta|x), a)$ (resp. maximalizuje $v(\pi(\theta|x), a)$). Takúto aktivitu budeme nazývať *aposteriórnu bayesovskou aktivitou*. Príslušné rozhodnutie budeme nazývať *aposteriórny bayesovským rozhodnutím*.

Uplatnenie Bayesovho podmiieneného princípu je vhodné vtedy, keď ide o opakované rozhodnutia, ktoré sa prijímajú v pomerne rovnakých podmienkach.

5. Hľadanie najlepšieho rozhodnutia v problémoch, štrukturalizovaných pomocou stromov rozhodovania alebo diagramov vplyvu

Najznámejší algoritmus „riešenia“ stromov rozhodovania, ktorý je známy ako *redukcia stromu rozhodovania*, možno nájsť v našej literatúre (napríklad v [21; 22]), a preto ho nebudeme uvádzať. Uvedieme len výsledok „riešenia“ stromu z príkladu 1. Podrobne uvedieme jeden z algoritmov „riešenia“ diagramov vplyvu (podľa [15]).

5.1. Redukcia stromu rozhodovania z príkladu 1

Kvôli jednoduchosti si podrobnejšie všimneme len vetvu a_1 v príslušnom strome rozhodovania.

Máme apriórne pravdepodobnosti: $P(V) = 0,5$; $P(\bar{V}) = 0,5$. Okrem toho máme experimentálne informácie: $P(U|V) = 0,8$; $P(U|\bar{V}) = 0,3$.

Potom zrejme

$$P(\bar{U}|V) = 0,2; P(\bar{U}|\bar{V}) = 0,7$$

Podľa Bayesovej teóremy možno vypočítať aposteriórne pravdepodobnosti

$$P(V|U) = \frac{P(U|V)P(V)}{P(U|V)P(V) + P(U|\bar{V})P(\bar{V})} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,8 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5} \approx 0,73$$

$$P(V|\bar{U}) = \frac{P(\bar{U}|V)P(V)}{P(\bar{U}|V)P(V) + P(\bar{U}|\bar{V})P(\bar{V})} = \frac{0,2 \cdot 0,5}{0,2 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5} \approx 0,22$$

Z toho dostaneme

$$P(\bar{V}|U) = 1 - P(V|U) = 0,27; P(\bar{V}|\bar{U}) = 1 - P(V|\bar{U}) = 0,78$$

Budeme potrebovať aj pravdepodobnosti $P(U)$ a $P(\bar{U})$. Je zrejmé, že $P(U)$ sa rovná menovateľu výrazu na výpočet $P(V|U)$ a $P(\bar{U})$ sa rovná menovateľu výrazu na výpočet $P(V|\bar{U})$. Teda

$$P(U) = 0,8 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,55; P(\bar{U}) = 0,2 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,45$$

Podobne by sme dostali potrebné pravdepodobnosti pre vetvu a_2 . Experimentálne informácie hovoria, že $P(U|V) = 0,9$; $P(U|\bar{V}) = 0,3$.

Pomocou Bayesovej teóremy by sme dostali

$$P(V|U) = 0,75; P(V|\bar{U}) = 0,125$$

Z toho dostaneme

$$P(\bar{V}|U) = 1 - P(V|U) = 0,25; P(\bar{V}|\bar{U}) = 1 - P(V|\bar{U}) = 0,875$$

Pravdepodobnosti $P(U)$ a $P(\bar{U})$ budú

$$P(U) = 0,6; P(\bar{U}) = 0,4$$

Štruktúra celého problému rozhodovania spolu s naznačeným riešením pomocou redukcie stromu je na obrázku 4.

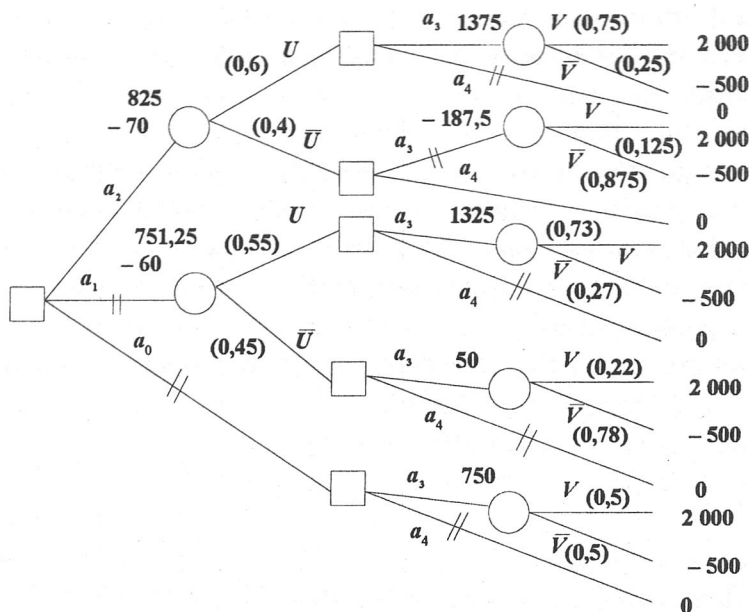
Na obrázku vidieť, že očakávané výnosy pre jednotlivé vetvy sú takéto.

Vetva, ktorá sa začína hranou a_0 , dáva očakávaný výnos 7 500 000,- Sk.

Vetva, ktorá sa začína hranou a_1 , dáva očakávaný výnos 7 512 500 - 600 000 = 6 912 500,- Sk.

Obrázok 4

„Riešenie“ stromu rozhodovania problému z 1. príkladu (výnosy sú v desaťtisícoch Sk)



Vetva, ktorá sa začína hranou a_2 , dáva očakávaný výnos $8\,250\,000 - 700\,000 = 7\,550\,000$, - Sk. Najvýhodnejšia je vetva, ktorá sa začína hranou a_2 . Vykoná sa dodatočný geologický prieskum za $700\,000$, - Sk. Keď bude prieskum signalizovať úspešnosť vrtu (U), pôjdeme po hrane a_3 – vykonáme ťažobný vrt. Keď bude prieskum signalizovať neúspešnosť vrtu (\bar{U}), pôjdeme po hrane a_4 – nezačneme ťažiť.

5.2. Algoritmus „riešenia“ diagramov vplyvu

Existuje viacero algoritmov riešenia problémov rozhodovania štrukturalizovaných pomocou diagramov vplyvu („riešenia“ diagramov vplyvu). Uvedieme algoritmus popísaný v [15].

1. Skontrolovať, či diagram vplyvu má len jeden hodnotový uzol a či nemá cykly. Uzly, ktoré neovplyvnia riešenie, nazveme *neproduktívne (barren) uzly*. Uzly, ktoré nie sú hodnotové a končí sa v nich aspoň jedna hrana a žiadna z nich nevychádza, sú neproduktívne a možno ich zrušiť. Deterministické uzly sa nahradia situačnými uzlami. Pre všetky kombinácie výsledkov predchodcov bude mať takýto uzol len jeden výsledok, ktorý nastane s pravdepodobnosťou jeden.

2. Hľadať situačné uzly, z ktorých každý a) bezprostredne predchádza hodnotový uzol; b) bezprostredne nepredchádza žiadny iný uzol.

Každý taký uzol zredukovať (vypočítať zodpovedajúce očakávané hodnoty (bayesovské)). Hodnotový uzol „zdedí“ predchodcov zredukovaného uzla.

3. Hľadať rozhodovací uzol, ktorý a) bezprostredne predchádza hodnotový uzol; b) bezprostredne ho predchádza každý z ostatných bezprostredných predchodcov hodnotového uzla.

Keď taký uzol neexistuje, prejsť ku kroku 5.

Keď existuje, zredukujeme ho (nájdeme zodpovedajúcu optimálnu aktivitu). Hodnotový uzol po ňom „nezdedí“ žiadnych ďalších predchodcov. V dôsledku toho môžu vzniknúť ďalšie neproduktívne uzly, ktoré možno zrušiť.

4. Vrátiť sa ku kroku 2 a pokračovať dotedy, kým nie sú všetky uzly zredukované a diagram „vyriešený“.

5. Zmeniť orientáciu jednej orientovanej hrany medzi situačnými uzlami takto:

a) Nájsť taký situačný uzol A, ktorý

– bezprostredne predchádza hodnotový uzol,

– bezprostredne nepredchádza žiadny rozhodovací uzol.

b) Nájsť takú orientovanú hranu z A do situačného uzla B, že neexistuje iná cesta z A do B ako po tejto hrane.

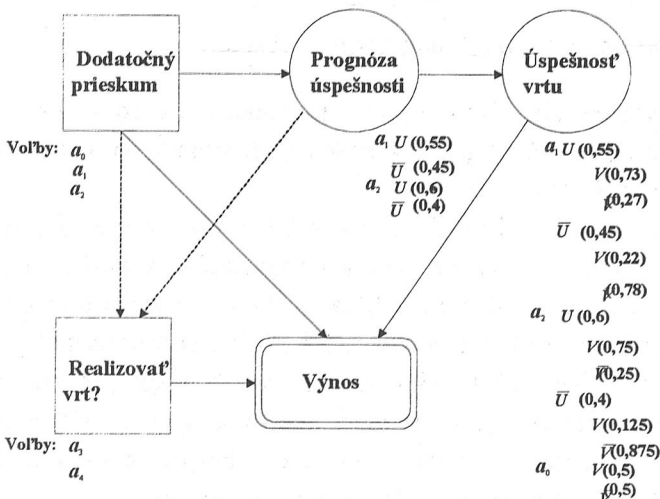
c) Pomocou Bayesovej teóremy zmeniť orientáciu nájdenej hrany a vrátiť sa ku kroku 2.

Nájdeme najlepšie riešenie problému z príkladu 1, štrukturalizovaného pomocou diagramu vplyvu.

Na obrázku 5 sú pri rozhodovacích uzloch uvažované voľby a pri situačných uzloch možné výsledky spolu s pravdepodobnosťami (v zátvorkách) ich nastatia.

Obrázok 5

Modifikovaný diagram vplyvu problému z príkladu 1 (prvý krok „riešenia“)



Podľa uvedeného algoritmu hľadáme v druhom kroku situačný uzol, ktorý bezprostredne predchádza hodnotový uzol a bezprostredne nepredchádza žiadny iný uzol. Situačný uzol *Úspešnosť vrtu* síce bezprostredne predchádza hodnotový uzol, ale zároveň bezprostredne predchádza uzol *Prognóza úspešnosti*. Oba rozhodovacie uzly síce tiež bezprostredne predchádzajú hodnotový uzol, ale žiadny z nich nespĺňa podmienku b) v treťom kroku algoritmu.

Keby sme chceli priamo riešiť problém rozhodovania tak, ako je naznačený na obrázku 3, nebolo by možné zobrať do úvahy informácie o možnostiach dodatočného prieskumu a o prognózach úspešnosti, iba apriórne informácie o úspešnosti vrtu. Treba prejsť k piatemu kroku algoritmu riešenia. Podľa neho sa využitím Bayesovej teóremy vypočítajú aposteriórne pravdepodobnosti (tie sme už vypočítali pri „riešení“ stromu rozhodovania problému z príkladu 1) a zmení sa orientácia hrany, ktorá spája uzly *Úspešnosť vrtu* a *Prognóza úspešnosti*. Modifikovaný diagram (aj s vypočítanými aposteriornými pravdepodobnosťami) je na obrázku 5.

T a b u ľ k a 1

Dodatočný prieskum	Prognóza úspešnosti	Realizovať vrt?	Úspešnosť vrtu	Výnos (desaťtisíce Sk)	
a_0	U	a_3	V	2 000	
			-	-500	
	a_4	V	2 000		
		-	0		
	-	U	a_3	V	2 000
				-	-500
a_1	U	a_3	V	2 000	
			-	-500	
	a_4	V	0		
		-	0		
	-	U	a_3	V	2 000
				-	-500
a_2	U	a_3	V	2 000	
			-	-500	
	a_4	V	0		
		-	0		
	-	U	a_3	V	2 000
				-	-500
a_4	V	0			
	-	0			

Tabuľky, ktoré obsahujú kombinácie aktivít a stavov prírody spolu s príslušnými výnosmi a slúžia na mapovanie postupnej redukcie uzlov, sa obyčajne uvádzajú pri hodnotovom uzle.

My ich vzhľadom na ich veľkosť budeme uvádzať osobitne. Tabuľku, ktorá zodpovedá diagramu na obrázku 4, je zbytočné uvádzať, pretože neslúži ako východisko na redukciu uzla.

Diagramu na obrázku 5 náleža tabuľka 1. Ide v podstate o modifikovanú tabuľku výnosov. V tabuľke je každej kombinácii uvažovaných aktivít a stavov prírody priradený nejaký výnos.

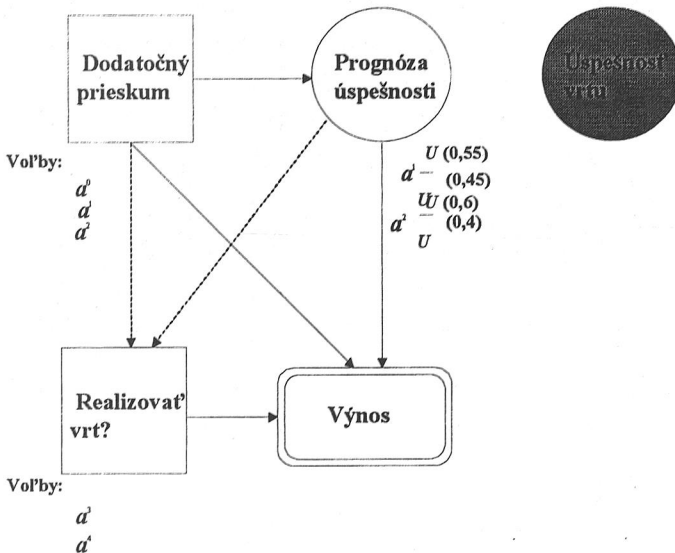
Treba poznamenať, že algoritmus „riešenia“ diagramu vplyvu, ktorý sme uviedli, predpokladá symetrickú štruktúru problému rozhodovania.

V strome rozhodovania na obrázku 4 si predstavme, že vetva, ktorá sa začína hranou a_0 , má rovnaké uzly a hrany ako vetva, ktorá sa začína hranou a_1 , a vetva, ktorá sa začína hranou a_2 .

Takáto symetria sa uvažuje aj v tabuľke 1. Na obrázku 6 je druhý krok riešenia problému, v ktorom sme redukovali uzol *Úspešnosť vrtu*, to znamená, že sme vypočítali príslušné očakávané výnosy. Hodnotový uzol „zdedil“ predchodcov redukovaného situačného uzla.

Obrázok 6

Druhý krok „riešenia“ diagramu vplyvu problému z príkladu 1



Výsledky redukcie (pri výpočte sme počítali s pravdepodobnosťami, ktoré sú znázornené na obrázku 5 pri uzle *Úspešnosť vrtu*) sú uvedené v tabuľke 2.

Tabuľka 2

Dodatočný prieskum	Prognóza úspešnosti	Realizovať vrt?	Očakávaný výnos (desaťtisíce Sk)
a_0	U	a_3	750
	—	a_4	0
	U	a_3	750
a_1	U	a_4	0
	—	a_3	1 325
	U	a_4	0
a_2	U	a_3	50
	—	a_4	0
	U	a_3	1 375
		a_4	0
		a_3	-187.5
		a_4	0

V treťom kroku riešenia problému bude redukovaný rozhodovací uzol *Realizovať vrt?*, to znamená, že nájdeme príslušné preferované varianty. Tretí krok riešenia je znázornený na obrázku 7. Výsledky redukcie sú uvedené v tabuľke 3. Vo štvrtom kroku sa redukuje situačný uzol *Prognóza úspešnosti* (na obr. 8). Výsledky redukcie uvádzame v tabuľke 4.

Tabuľka 3

Dodatočný prieskum	Prognóza úspešnosti	Realizovať vrt?	Očakávaný výnos (desaťtisíce Sk)
a_0	U	a_3	750
	—	a_3	750
a_1	U	a_3	1 325
	—	a_3	50
a_2	U	a_3	1 375
	—	a_4	0

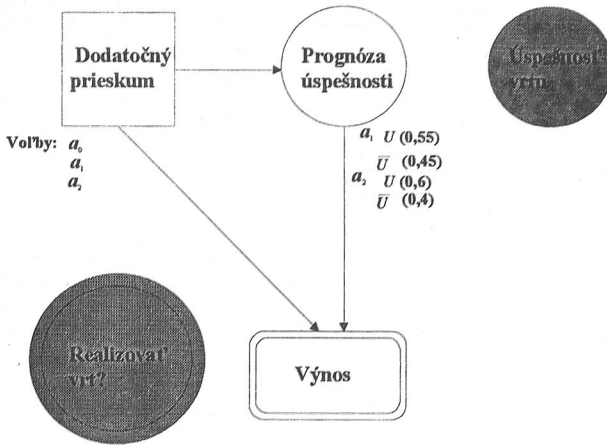
Tabuľka 4

Dodatočný prieskum	Očakávaný výnos (desaťtisíce Sk)	Upravený očakávaný výnos (desaťtisíce Sk)
a_0	750	750
a_1	751.25	$751.25 - 60 = 691.25$
a_2	825	$825 - 70 = 755$

V poslednom kroku riešenia (na obr. 9) sa redukuje posledný rozhodovací uzol. Najlepšia je postupnosť, ktorá sa začína aktivitou a_2 – realizovať drahší (700 000,- Sk) dodatočný geologický prieskum (v tab. 4). V prípade, že dodatočný prieskum bude signalizovať úspešnosť vrtu (U), mali by sme realizovať aktivitu a_3 – uskutočniť ťažobný vrt (v tab. 3).

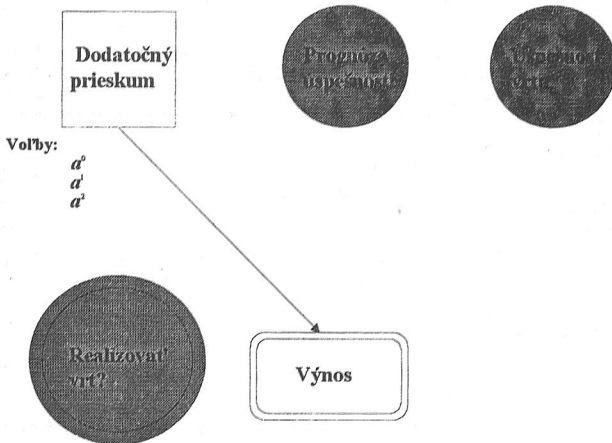
Obrázok 7

Tretí krok „riešenia“ diagramu vplyvu problému z príkladu 1



Obrázok 8

Štvrtý krok „riešenia“ diagramu vplyvu problému z príkladu 1

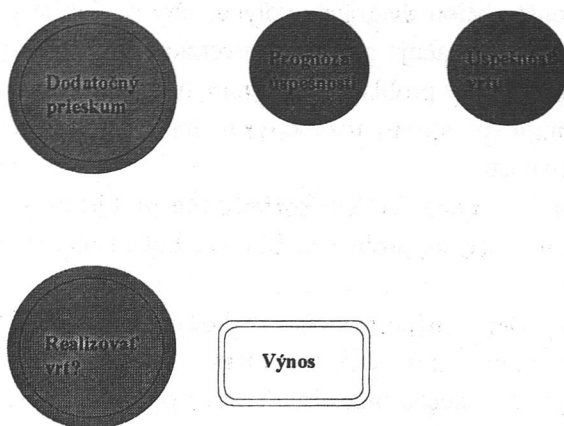


V prípade, že nás „náhoda privedie“ k \bar{U} – dodatočný prieskum bude signalizovať neúspešnosť vrtu, mali by sme realizovať aktivitu a_4 – neuskutočniť ťažobný vrt (v tab. 3).

Dostali sme, samozrejme, rovnaké riešenie ako pri riešení problému redukciou príslušného stromu rozhodovania.

Obrázok 9

Posledný krok „riešenia“ diagramu vplyvu problému z príkladu 1



Možno si všimnúť, že pri riešení uvedeného problému rozhodovania sme pri hľadaní najlepšej postupnosti aktivít rátali súčasne tak s aposteriornymi, ako aj s apriórными pravdepodobnosťami (pravdepodobnosti úspešnosti vrtu pre a_0) a porovnávali sme aj bayesovské očakávané výnosy s výnosmi, ktoré považujeme za vopred známe (napríklad v tabuľke 2 bayesovský očakávaný výnos pre $a_1 - U - a_3$ je 1 325 a tento výnos porovnáваме so známym výnosom pre $a_1 - U - a_4$, ktorý je 0).

Pri riešení reálnych problémov rozhodovania je to prirodzený a bežný postup. Jednoducho vo formálnej analýze problému rozhodovania využívame všetky informácie, ktoré máme k dispozícii, bez ohľadu na to, či sú apriórne, alebo aposteriórne.

Podobne bežne porovnáваме ľubovoľné výnosy (straty), ktoré sú logicky porovnateľné bez ohľadu na to, či ide o očakávané výnosy (straty), alebo nejaké výnosy (straty), ktoré považujeme za vopred známe, a podobne.

6. Porovnanie stromov rozhodovania a diagramov vplyvu

Možno si položiť otázku: „Ktorý z týchto dvoch nástrojov použiť?“ Všeobecne, každý problém rozhodovania, ktorý možno štrukturalizovať a riešiť pomocou stromu rozhodovania, možno štrukturalizovať a riešiť s rovnakým výsledkom aj pomocou diagramu vplyvu a naopak.

Stromy rozhodovania aj diagramy vplyvu sa spolu vhodne dopĺňajú. Diagramy vplyvu je vhodné využiť v etape štrukturalizácie problému, na zobrazenie štruktú-

ry rozsiahlych problémov rozhodovania. Stromy rozhodovania sú veľmi vhodné na zobrazenie detailov problému.

Často sa začína konštrukciou diagramu vplyvu, aby sa ľahšie pochopili základné prvky problému, a pokračuje sa jeho konverziou na strom rozhodovania s cieľom lepšie pochopiť detaily problému. Diagram vplyvu môže byť užitočnejší pri prezentácii problému iným, stromy rozhodovania môžu byť užitočnejšie napríklad pri analýze senzitivnosti.

Ktorá z týchto techník bude pri riešení konkrétneho problému dominantná, to závisí len od charakteru riešeného problému. Ide o komplementárne, nie o konkurenčné techniky.

Okrem Bayesovho podmieneného princípu rozhodovania existujú aj iné možnosti. Väčšina z nich však má len teoretický význam.

V príklade boli Θ aj A konečné množiny. Takéto problémy rozhodovania sú v praxi najčastejšie. Často je potrebné prijať postupnosť rozhodnutí. Príklady riešenia podobných problémov pomocou stromov rozhodovania a diagramov vplyvu možno nájsť napríklad v [22]. Existujú problémy rozhodovania, v ktorých Θ je konečný interval a $A = \Theta$ a problémy, v ktorých je Θ konečný interval a A je konečná množina aktivít. Viac o riešení podobných problémov možno nájsť napríklad v prácach [1] a [22].

Došlo 5. 8. 2002

Literatúra

- [1] BERGER, J. O.: *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York: Springer-Verlag 1993.
- [2] BONITZER, J.: *Reflexions sur les modèles statistiques de décision*. *Revue de statistique appliquée*, 1984, zv. XXXII, č. 1.
- [3] BURNS, W. J. – CLEMEN, R. T.: *Covariance Structure Models and Influence Diagrams*. *Management Science*, 1993, zv. 39, č. 7.
- [4] CLEMEN, R. T.: *Making Hard Decisions: An Introduction to Decision Analysis*. Kent, Boston: PWS 1991.
- [5] COVALIU, Z. – OLIVER, R. M.: *Representation and Solution of Decision Problems Using Sequential Decision Diagrams*. *Management Science*, 1995, zv. 41, č. 12.
- [6] FECENKO, J. – PINDA, Ľ.: *Matematika III*. Bratislava: Edičné stredisko Vysokej školy ekonomickej 1991.
- [7] FISHBURN, P. C.: *Foundations of Decision Analysis: Along the Way*. *Management Science*, 1989, zv. 35, č. 4.
- [8] HOWARD, R. A. – MATHESON, J. E.: *Influence Diagrams*. In: HOWARD, R. – MATHESON, J. (eds.): *The Principles and Applications of Decision Analysis II*. Palo Alto, CA: Strategic Decision Group 1984.
- [9] HOWARD, R. A.: *Decision Analysis: Practice and Promise*. *Management Science*, 1988, zv. 34, č. 6.

- [10] KEENEY, R. L. – RAIFFA, H.: *Decisions with Multiple Objectives*. New York: J. Wiley & Sons 1978.
- [11] KIRKWOOD, C. W.: *An algebraic Approach to Formulating and Solving Large Models for Sequential Decision Under Uncertainty*. *Management Science*, 1993, zv. 39, č. 7.
- [12] RAIFFA, H.: *Decision Analysis, Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*. Massachusetts: Addison-Wesley 1970.
- [13] SARIN, R. – WAKKER, P.: *Folding Back in Decision Tree Analysis*. *Management Science*, 1994, zv. 40, č. 5.
- [14] SCHACHTER, R. D.: *Automating Probabilistic Inference*. Technical Report. Stanford: Stanford University 1984.
- [15] SCHACHTER, R. D.: *Evaluating Influence Diagrams*. *Operations Research*, 1986, zv. 34, č. 6.
- [16] SCHACHTER, R. D.: *Probabilistic Inference and Influence Diagrams*. *Operations Research*, 1988, zv. 36, č. 4.
- [17] SCHACHTER, R. D. – KENLEY, C. R.: *Gaussian Influence Diagrams*. *Management Science*, 1989, zv. 35, č. 5.
- [18] SMITH, J. E. – HOLTZMAN, S. – MATHESON, J. E.: *Structuring Conditional Relationships in Influence Diagrams*. *Operations Research*, 1993, zv. 41, č. 2.
- [19] SMITH, J. Q.: *Decision Analysis. A Bayesian Approach*. London: Chapman and Hall 1988.
- [20] SMITH, J. Q.: *Influence Diagrams for Bayesian Decision Analysis*. *European Journal of Operational Research*, 40, 1989.
- [21] ŠIMKOVIC, J. – TEREK, M.: *Systémové modelovanie*. Bratislava: Alfa 1987.
- [22] TEREK, M.: *Úvod do analýzy rozhodovania a bayesovskej indukcie*. Bratislava: Ekonóm 2000.

DECISION TREES, INFLUENCE DIAGRAMS AND DECISION ANALYSIS

Milan TEREK

The article deals with the basic principles of decision analysis. Two tools of decision analysis – decision trees and influence diagrams are compared.

Decision analysis provides the structure and methods for systematic analysis of the decision problems. Decision analysis provides along with the framework for thinking about the decision problems also analytical tools, which are able to simplify the decision analysis process.

The decision problems of choosing one activity (variant of solution of a real problem) from a finite set of all considerable activities are considered in the article.

Decision analysis simplifies the orientation in the decision problems. Decision analysis can be defined as a prescriptive approach, which enables people of average intelligence to think systematically about some complicated, important real problems. Decision analysis provides a certain structural framework and the instructions for systematic thinking in the solution of complicated decision problems.

In the application process of the decision analysis often subjective opinions about the uncertainty and about values of some problem parameters are important input data.

Accordingly the methods of decision analysis allow to include also subjective opinions into the formal analysis. Decision analysis offers also procedures, which facilitate orientation and a certain self-control of the person, his own subjective opinions.

Decision analysis is based on knowledge of the statistical decision theory, which deals with decision theory in uncertainty conditions when statistic information is provided, which allows to include some uncertainty aspects into the formal decision problem analysis. Decision analysis can then be defined as the summary of decision methods, which are based on the statistic decision theory.

In statistical decision theory the experimental information is combined with other relevant problem aspects with purpose to find the best solution.

Several tools for structuralization of decision problems are known. The suitability of application of any of them depends on the character of the particular problem.

Some decision problems can be structuralized by payoff table or loss table. This problem and other ones with similar structure can be structuralized by help of the decision tree or the so-called influence diagram. In the article mainly the influence diagrams are mentioned (less presented in our literature so far) and compared with decision trees on the example of the decision problem known as „prospector problem“.

The influence diagram enables a simple graphic projection of the decision problem. It consists of value nodes, decision nodes, chance nodes and arrows, which connect them. In the influence diagram there are mentioned also all options related to the corresponding decision nodes, also all results related to chance nodes together with probabilities of their coming and yields related to value nodes.

The conditional Bayes decision principle is being used by solving decision problems. In our literature you can find the most known decision trees solution algorithm called the decision tree reduction, it is not mentioned in our article. One of the solution algorithms of influence diagrams is mentioned in detail.

Generally, every decision problem which could be structuralized and solved by decision tree, can be structuralized and solved by the influence diagram as well, and the same results are obtained, and also the other way round.

Decision trees and influence diagrams suitably supplement each other. The most suitable application of influence diagrams is in the problem structuralization stage, to describe the structure of large decision problems. Decision trees are very suitable to describe the problem in details.

Often we begin with the construction of influence diagram to easier understand the basic problem items. Then follows the conversion into the decision tree with the goal to better understand the problem details. The influence diagram can be more effective by presenting the problem, decision trees can be more effective e. g. in sensitivity analysis.

It depends only on the character of the solved problem, which of these techniques will be dominant for a concrete problem solution. These techniques are complementary, not competitive.

Excepting the conditional Bayes decision principle also other decision principles exist. The majority of them have only theoretical importance.

There are the decision problems in which the set of all possible states of nature is the finite interval, equal to the set of all possible actions. The decision problems exist in which the set of all possible states of nature is the finite interval and the set of all possible actions is the finite set.

In the given example both the set of all possible states of nature and the set of all possible actions are finite sets and the making of the sequence of decisions is necessary. The decision problems of this type are the most frequent in practice.