

Emergencia deterministického chaosu: ohraničená pasáž v evolúcii ekonomiky

Ladislav ANDRÁŠIK* – Július KREMPASKÝ**

Jadro výkladu v príspevku sa zaoberá sekundárnym zovšeobecnením Schumpeterovho modelu oscilácií v ekonomických systémoch. Ako je známe, prvotné zovšeobecnenie schumpeterovského evolučného modelu prostriedkami synergetiky urobili W. Weidlich a G. Haag v [31]. Autori v záujme lepšej zrozumiteľnosti problematiky zaradili do textu aj jednoduchší a v širšej ekonomickej komunite známejší model, ktorý však tiež môže viesť k emergencii deterministického chaosu „klasického“ Lorenzovho typu (meteorológa E. N. Lorenza [12]). S tým istým cieľom – „premostením“ oboch prístupov lepšie sa priblížiť čitateľom – použili namiesto analytických matematických prostriedkov názornejšiu počítačovú simuláciu a/alebo počítačové experimentovanie s tradičným matematickým modelom premeneným na simulačný model. Toto experimentovanie prebieha v toolboxe STELLA.

V inovovanom zovšeobecnení schumpetrovského vlnenia autori namiesto pôvodných dvoch evolučných rovníc formulujú tri rovnice s cieľom ukázať, že tieto rovnice sa v limitnom prípade stotožňujú so známym prístupom Lorenza, resp. s jeho redukovaným systémom troch evolučných rovníc opisujúcich dynamiku klimatických systémov. O nich je známe, že pripúšťajú aj tzv. režim deterministického chaosu. Z toho by vyplynulo, že aj evolučné ekonomické systémy môžu vykazovať smerovanie k emergencii takýchto chaotických režimov. Tento záver by mohol vysvetliť skutočnosť, prečo ekonomické oscilácie majú vo všeobecnosti znaky chaotickej dynamiky, ako aj fakt, že Lorenzov systém evolučných rovníc sa vyznačuje akousi univerzálnosťou, pretože ich platnosť sa doteraz preukázala v rozličných, kvalitatívne od seba odlišných systémoch. V ostatných 10 – 15 rokoch sa objavilo vo vedecko-odbornej tlači viacero aplikácií chaotickej dynamiky na ekonomické hlavolamy. V priloženom zozname literatúry sa o tom čitateľ môže presvedčiť – autori v texte poukazujú na niektoré zaujímavé riešenia.

Autori vo svojom výskume komplexných a adaptívnych ekonomických systémov získali nové poznatky dvoch, vzájomne sa dopĺňajúcich nástrojov:

* prof. Ing. Ladislav ANDRÁŠIK, DrSc., Slovenská technická univerzita, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra ekonómie a manažmentu, Iľkovičova3, 812 19 Bratislava 1

** prof. Ing. RNDr. Július KREMPASKÝ, DrSc., Slovenská technická univerzita, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra fyziky, Iľkovičova3, 812 19 Bratislava 1

• V prípade L. Andrášika dominujú počítačové experimenty založené na simulačných modeloch najnovšej generácie, predovšetkým v oblasti multiagentových systémov. Netradičné a nekonvenčné simulačné modely, skonštruované na Katedre ekonómie a manažmentu Fakulty elektrotechniky a informatiky Slovenskej technickej univerzity v Bratislave (KEM FEI STU), umožňujú vytvárať umelé laboratória použiteľné pre základný ekonomický výskum, pedagogický proces, ale aj pre orgány hospodárskej politiky a podnikateľskú prax. Je zaujímavé, že evolučné procesy prebiehajúce v týchto laboratóriách majú sklon padať do chaosového režimu, a to aj z vnútorných príčin. Tieto zistenia prekvapivo dobre korešpondujú s objektívnym ekonomickým vývojom najmä v tzv. tranzitívnych hospodárstvach.

• V prípade J. Krempaského prevažuje fyzikálno-matematický prístup, v ktorom sa vecne i formou prejavujú celoživotné skúsenosti exaktného vedca. V dnešnom čase, keď sa vo svete v širokej miere angažujú mnohí fyzici pri riešení ekonomických hlavolamov, hodno spomenúť, že obaja autori spolupracujú na zblížovaní metód fyziky a ekonómie už viac ako 20 rokov. To, čo ich priviedlo k sebe, je práve problematika nelineárnych dynamických systémov, teória katastrof, chaosu, a najmä snahy o aplikáciu metód synergetiky na riešenie spoločenskovedných analýz.

S odstupom dlhých dvadsiatich rokov treba so smútkom konštatovať, že tieto snahy autorov nenašli u slovenských ekonómov pochopenie a až v súčasnosti, keď sa predmetná problematika vo svetovej ekonomickej vede presadila naplno, zisťujeme sporadický import poznatkov z diel západných autorov.

Treba, bohužiaľ, konštatovať, že najviac zaostávania v tomto smere sme si nahonobili v novom režime, keď pri horlivej nadpráci na zavrnutí marxistickej paradigmy ekonomického myslenia sa zbožštila pomerne zastaraná podoba neoklasickej ekonómie. Najviditeľnejšie sa to prejavilo vyzdvihnutím učebnice Samuelsona a Nordhauasa na oltár v role jedinej Svätej knihy. Autori vôbec nechcú spochybniť kvalitu tejto svetovo uznávanej učebnice, upozorňujú však aj týmto príspevkom, že najnovšie smerovania v rámci main stream economics akceptujú viaceré novšie výdobytky z oblasti predstavovanej aplikáciami nelineárnej dynamiky. Napokon práve o Samuelsonovi je známe, že v celej svojej vedeckej a učiteľskej kariére bol veľmi ústretový voči novým výdobytkom ekonómie a vedel ich majstrovsky včleniť do spomínanej učebnice. Autorom pripadá ako zneváženie celoživotného úsilia Samuelsona snaha niekoľkých slovenských ekonómov o zakonzervovanie poznatkov z jeho staršieho vydania v našich podmienkach.

Ak sa vzdáme prísnej matematickej definície, potom môžeme dynamický systém pomenovať „komplexným“ za predpokladu, že bude nelineárny a vhodný na charakteristiku tak, že bude mať aspoň tri nasledujúce črty: a) nespojitosť

v čase vo svojich stavových premenných; b) citlivú závislosť od východiskových podmienok; c) aperiodickosť („neregulárnosť“) tvarov fluktuácií.

Najdôležitejšie však je, aby sa uvedené črty objavovali endogénne vnútri dynamického systému samého, a nie ako vonkajšie perturbácie v takej podobe, ako sú povedzme postupnosti náhodných šokov, ktoré používa nová klasická ekonómia vo svojich modeloch reálneho priemyselného cyklu. To dáva nášmu systému keynesovský charakter.

Keby sme chceli vymenovať aspoň stručný zoznam prístupov komplexnej dynamiky aplikovaných v ekonómii, tak by sme spomenuli aspoň teóriu katastrof, systémy interagujúcich častíc alebo buniek, fraktály, evolučnú synergetiku, čudné atraktory, a hlavne teóriu chaosu, na aplikáciu ktorej predovšetkým sústreďujeme pozornosť v tomto príspevku.

Z hľadiska požiadaviek lepšej orientácie čitateľa uvádzame, aspoň selektívne, nasledovné vývinové úseky o predmetnej problematike, pričom to, čo tu len naznačujeme alebo pomenúvame, podrobnejšie vysvetľujeme v hlavnom texte. Ako je dnes už všeobecnejšie známe, teória chaosu sa odvíja od výsledkov výskumov meteorológa Lorenza (1963), ktoré ďalej rozpracovali Li a Yorke (1975), a neskôr početné matematické osobnosti, sa zakladá na myšlienke citlivej závislosti dynamického procesu od daných východiskových podmienok. Ľudovo povedané ide o to, že stačia malé zmeny v hodnote parametra na začiatku procesu alebo východiskovej hodnoty činiteľa dodávajúceho hybnosť procesom a už vedú systém k správaniu, ktoré je voči tejto malej zmene dramaticky odlišné. O tom je metaforický príklad, ktorý je známy aj z bežnej literatúry ako efekt mávnutia motýľích krídiel: „...motýľ mávne krídlami nad Hongkongom a nad Floridou začne zúriť hurikán.“

Uvedený efekt, ak ho máme vzťahnúť na ekonomickú problematiku, sa využíva napríklad pri odmietaní relevantnosti vypovedacej hodnoty teórie racionálnych očakávaní v menej stacionárnych podmienkach. Dodajme už teraz, že práve v tranzitívnych ekonomikách sú podmienky silne nestacionárne, resp. majú vysokú mieru neurčitosti, ktorú napríklad na Slovensku podnecuje, ba vytáča do neúnosných výšok vláda a parlament tým, že svojou legislatívnou činnosťou nivočí kvalitu ústavy, zákonov a im na roveň postavených ďalších štátnych predpisov. Bohužiaľ, mnohé zákony, prijaté aj počas pôsobenia v poradí ostatnej koalície, namiesto toho, aby upevňovali a stabilizovali štát a spoločnosť, nadobudli fundamentálne deštruujúci charakter.

V priebehu ostatných 20 – 25 rokov jeden z autorov v Ekonomickom časopise publikoval viacero statí a diskusných článkov, v ktorých upozorňoval na potrebu hlbšieho skúmania vplyvov chaotickej dynamiky v trhových ekonomikách veľmi závislých od burzových špekulácií a voluntaristického správania centrálnych

bánk. Kritizoval pritom niektoré prístupy, ktoré príliš zjednodušovali objektívnu ekonomickú realitu. Analyzoval aj konkrétne modely takých autorov, ako Schinassy (1981), Benhabib a Day, (1982); Grandmont (1985), ktorí boli v tom čase priekopníkmi v použití týchto nástrojov.¹

V každom prípade, aj s odstupom rokov treba povedať, že neboli ešte stále využité potencie početných nástrojov vhodných na skúmanie chaotickej dynamiky nielen vo všeobecnom zmysle, ale aj v ekonomickom výskume. Niektoré takéto javy neurčitosti v rámci chaotickej dynamiky môžeme považovať za niečo podobné, ako sú zdroje fundamentálnej neurčitosti keynesovského typu. V predkladanom príspevku sa pokúšame ukázať, ako sa môže v rámci modelovania chaotickej dynamiky ekonomického rozvoja endogénne generovať aperiodicita a typický chaos.

Úvod

Hospodárske procesy patria do triedy komplexných evolučných systémov. Dlhodobá evolúcia hospodárstiev pozostáva z viacerých, od seba sa odlišujúcich etáp, dôb, epoch a podobne pomenovaných časových intervalov. Podľa predmetných dejov a iných vecných ukazovateľov sa zvyknú nazývať aj režimami, cyklami, udalosťami či príbehmi. V súlade s uvedenými zvyklosťami sme si dovolili nazvať tento príspevok pasážou (výsekom) z evolúcie, ktorá má vo vybraných prípadoch charakter veľmi blízky kanonickej podobe deterministického chaosu.

Aj ľudom, ktorí sa nezaoberajú hospodárskymi problémami profesionálne, je známe, že mnohé procesy v ekonómii vykazujú cyklický priebeh. Medzi odborníkmi sa o nich hovorí ako o Schumpeterových, Kuznetsovových, resp. Kondratjevových „ekonomických vlnách“, t. j. dlhých vlnách solitónového typu. Matematické modely týchto procesov poskytujú ako riešenie funkcie vyjadrujúce pravidelný (harmonický) priebeh týchto cyklov s deterministicky stanovenou hodnotou časovej periódy. Pri dôslednejšom skúmaní sa však dá zistiť značný rozptyl v hodnotách tohto ukazovateľa. To naznačuje, že sa tu zrejme uplatňuje alebo presadzuje aj určitý druh chaotickej dynamiky – či už z vonkajších alebo aj vnútorných príčin.

Viacerí autori prisudzujú podobné udalosti chaotickým „fluktuáciám“ v ekonomickej klíme. V práci [15] (a v mnohých ďalších) sa napríklad predpokladá, že tieto fluktuácie majú pravidelný „sínusový“ profil, čo je však dosť nerealistický predpoklad. Navyše je zřejmé, že len jednoduchou existenciou takýchto všeobecne veľmi malých fluktuácií, ktoré sa jednoducho nadradujú nad základné dominujúce ekonomické procesy, by sa pozorovaný rozptyl v časových periódach (na úrovni rádu až 100 %) nedal vysvetliť.

¹ Vzhľadom na veľmi rozsiahly zoznam literatúry, v ktorom sa uvádzajú významní svetoví autori, rozhodli sme sa vynechať autocitácie autorov tohto príspevku.

V posledných desaťročiach sa na pôde anorganických, ale aj biologických systémov objasnilo, že chaotickú dynamiku si môže vygenerovať aj sám deterministický systém, hoci nie je vložený do „zašumeného“ prostredia. Prvý známy systém tohto typu je Lorenzov systém. Ide o klimatický systém opísaný (po redukcii z pôvodných dvanástich) tromi evolučnými rovnicami [12], o ktorom sa matematicky striktné podarilo dokázať, že pripúšťa aj riešenie predstavujúce režim deterministického chaosu (pozri napr. [27]). H. Haken v práci [7] dokázal, že aj evolučné rovnice opisujúce dianie v laseri sú formálne identické s Lorenzovými rovnicami, z čoho vyplynulo, že aj laser môže vykazovať režim deterministického chaosu, čo sa aj skutočne potvrdilo [9]. V práci [10] jej autor dokázal, že aj systém evolučných rovníc opisujúcich štrukturalizáciu vesmíru (vznik galaxií a hviezd) sa tiež dá pretransformovať na rovnice analogické Lorenzovým rovniciam, čo vysvetľuje, prečo vznikajúce produkty (galaxie a hviezdy) vykazujú relatívne veľký rozptyl svojich hmotností. V práci [11] sa zasa ukazuje, že aj transportné fenomény v materiálnych médiách, napríklad fotoelektrický transport elektrónov, tiež podliehajú evolučným rovniciam podobným Lorenzovým.

Vzniká celkom prirodzená otázka, či táto „univerzalita“ Lorenzových rovníc ozrejmujúcich vznik režimu deterministického chaosu sa viaže len na neživé systémy. Keďže analogické fenomény sa pozorujú aj v sociálnej sfére, možno sa domnievať, že tento typ rovníc by sa mohol úspešne uplatniť aj pri modelovaní niektorých sociálnych procesov. V tomto príspevku sa pokúsime ukázať, že určitým zovšeobecnením už známeho modelu tzv. schumpeterovských hodín možno skutočne dospieť k rovnicam, ktoré sú formálne identické s Lorenzovými rovnicami. Ešte predtým by sme však – pre lepšiu intersubjektivitu nášho príspevku s konvenčnými ekonomickými prístupmi – radi zaviedli do nášho výkladu o niečo jednoduchší a medzi ekonómami frekventovanejší prístup vychádzajúci z elementárneho neoklasického či raného *main streamového* uvažovania, avšak v makroekonomickej rovine.

1. Emergencia chaosu v primitívnej virtuálnej ekonomike

Predpokladajme pre ľahší vstup do problematiky všeobecne známy elementárny makroekonomický model diskrétného tvaru. Mierne však zmeníme symboliku.² Nech symbol q označuje jednotkový output, písmeno k pomer kapitál/pracovná sila, t. j. $k = K/L$, β je exponent dvojfaktorovej produkčnej funkcie (konštantná elasticita substitúcie), b označuje úroňovú konštantu, w mieru rastu práceschopného

² Robíme to v záujme tých čitateľov, ktorí by sa chceli pokúsiť porovnávať a konfrontovať naše výsledky s tradičným makroekonomickým modelovaním, známym z učebníc ekonómie.

obyvateľstva, μ zápornú úroveň vplyvu koncentrácie kapitálu na životné podmienky, keď $\mu = m - k$, kde m je prah spokojnosti spoločnosti s kvalitou životného prostredia, η je exponent zaťaženia životného prostredia výrobnou činnosťou, c označuje jednotkovú spotrebu a s jednotkové úspory, t. j. platí konvenčný ekonomický vzťah $c = 1 - s$, napokon symbol a je činiteľom experimentovania. Pomocou uvedených symbolov môžeme vytvoriť koeficient experimentovania vyjadrený rovnicou

$$a = s * b \frac{1}{1 + w} \quad (1)$$

Môžeme si to predstaviť tak, že je to „ladiaci parameter“ (napríklad niečo také ako jazdec na reostate či „ladiace koliesko“ pri výbere frekvencie na rádioprijímači).

Ako je obvyklé, produkčnú funkciu bez uvažovania narušenia prostredia priemyselnou činnosťou (t. j. externalitami) vyjadríme nasledovne

$$q = b * k^\beta \quad (2)$$

prípadne so zavedením externalít

$$q = b * k^\beta * \mu^\eta \quad (2')$$

Aby sme mohli skúmať príbeh vo virtuálnej diskkrétnej ekonomike, musíme si vytvoriť jednoduchý simulačný model, v ktorom znázorníme správanie kľúčovej premennej ekonomiky, totiž kapitálovej vybavenosti, závislej od miery úspor a spotreby a od zaťaženia prostredia znečistením v dôsledku intenzity výrobných činností spoločnosti. Na tento účel použijeme pre začiatok (pre vyššiu úroveň intersubjektivít) modelovací softvér STELLA.³ Budeme teda chcieť sledovať odpovede premennej k na manipuláciu experimentátora s konštantným koeficientom a . V záujme toho skonštruujeme konvenčný vzťah vyjadrujúci prírastok kapitálu v diskkrétnej podobe

$$\Delta k = k(t + 1) - k(t) \quad (3)$$

alebo v explicitnom tvare

$$\Delta k = a * k^\beta * \mu^\eta - k \quad (3')$$

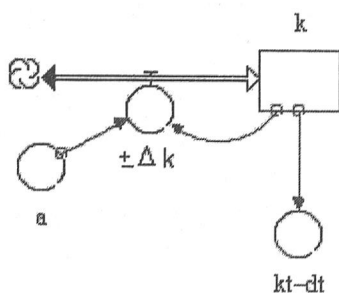
³ Uvedený softvér firmy *High Performance Systems, Inc.* používame od roku 1997 ako vzor a inšpiráciu na tvorbu makroekonomických modelov pre našich študentov – diplomantov odboru Výpočtová technika a informatika (vrátane telekomunikácií) a pre študentov odboru Automatizácia. Odbor telekomunikácie sa neskôr osamostatnil. Katedra ekonómie a manažmentu FEI STU vedie niekoľko diplomantov aj v tomto novom odbore. Poukazujeme na to, že pre študentov týchto odborov úplne postačí DEMO-verzia softvéru, pretože potom svoje simulačné modely, resp. vlastné virtuálne laboratóriá pre ekonomické experimentovanie realizujú najčastejšie v jazyku C++. Takto bolo obhájených už viac ako 20 špeciálnych diplomových prác.

Niekoľko minulých absolventov sa úspešne presadilo v NSR, v Rakúsku, v Japonsku, v Izraeli a podobne. Iní pracujú vo veľkých firmách, resp. v ich vysunutých pracoviskách na Slovensku, ako napríklad Siemens, IBM, Compaq atď. Pochopiteľne, softvér uvedenej firmy je len jedna z nemnohých tých, ktoré používame ako vzorové východisko. Väčšinou sú ich kreácie založené na ich vlastných nápadoch, čo považujeme za najcenejšie.

Pre ľahšiu manipuláciu a zviditeľnenie budeme sprvu predpokladať, že koeficienty μ , β , η sú rovné jednej. V takom prípade sa vzťah (1) príslušne zjednoduší, resp. stane sa lineárnym. Piktogram konštrukcie v prostredí STELLA je na nasledovnom obrázku.

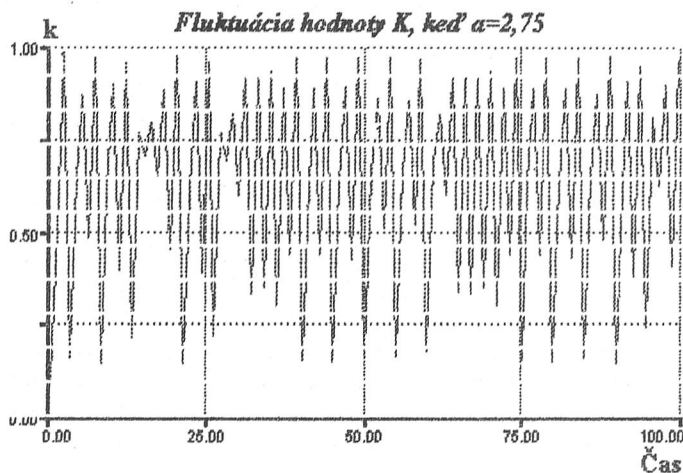
Obrázok 1

Piktogram konštrukcie v prostredí STELLA

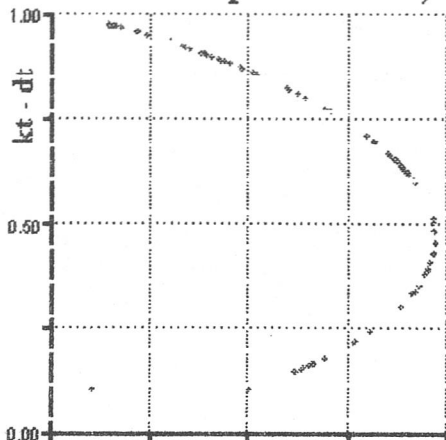


Na uvedenom obrázku 1 je obdĺžnik s označením k stavovou veličinou a Δk prítokovou veličinou. Šípky na oboch koncoch „potrubia“ ukazujú, že kapitál môže do ekonomiky pritekať aj odtekať, a to podľa toho, na akú hodnotu je nastavený ladiaci nástroj pre riadiacu premennú a . To je dobre viditeľné na ďalšom obrázku (snímky sú skombinované z výsledkov experimentovania v prostredí STELLA). Nastavenia na škále so stupňami po 0,5 sme nazvali *režimami*. Medzi režimom $a = 2,5$ a režimom $a = 3$ je pásmo, kde sa vynárajú chaotické režimy. Preto tu autori zvolili stupnicu po 0,25 a ako vidno, pri $a = 2,75$ sa chaos skutočne objavil (pozri obr. 2 – horný výsek zo snímky).

Obrázok 2

Nekanonický chaos v jednoduchom makroekonomickom modeli pri $a = 2,75$ 

Henonov atraktor pri hodnote $a=2,75$



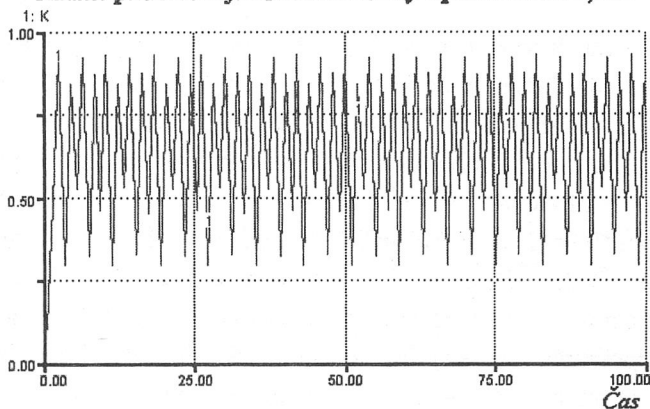
To, že ide naozaj o chaos, aj keď nie kanonický, ukazuje Henonov atraktor na spodnom obrázku 2 (časová diferenčná hodnota k_{dt} je na vertikálnej súradnici a absolútna hodnota k na horizontále – body riešení si síce „sadjú“ len na potenciálne body Henonovho atraktora, avšak na nepredpovedateľné miesto). Keby sme postupovali na „číselníku“ s ešte menšími dielmi, povedzme 0,125, zistili by sme, že medzi úrovňami $a = 2,5$ a $a = 2,75$ leží ešte celá množina chaosu rozličného tvaru.

Na snímke označenej ako obrázok 3, vidíme „poskakovanie“ hodnoty k tesne pred objavením sa chaosu, čo je situácia pri hodnote $a = 2,625$. Prípadne, keby sme zvolili ešte menší interval, potom pri hodnote $a = 2,6875$ sa už chaos objavil, ako vidno na obrázku 4. Na ďalšom obrázku (č. 5) je znázornená situácia pri hodnote $a = 2,78125$.

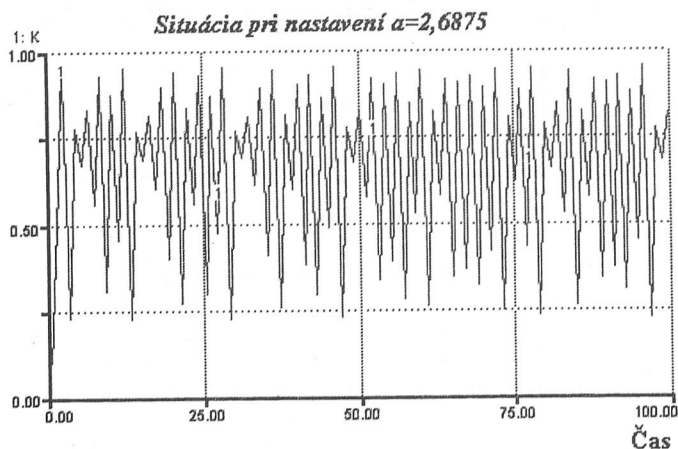
Obrázok 3

Mantinelové „poskakovanie“ hodnôt k pri úrovni $a = 2,625$

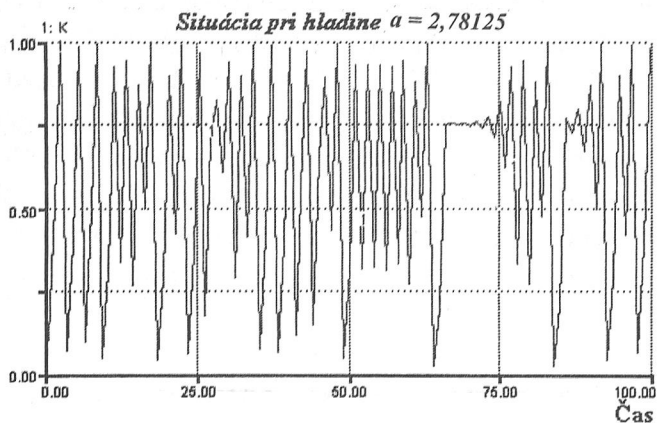
Takmer pravidelné fluktuácie hodnoty k pri úrovni $a=2,625$



Obrázok 4

Takmer kanonický chaos pri $a = 2,6875$ 

Obrázok 5

Rozličné režimy chaosu naskakujúce pri nadkritickej hodnote $a = 2,78125$ 

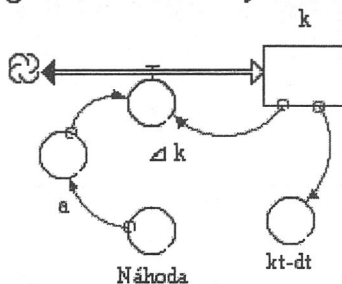
Až doteraz sme predpokladali, že koeficient a zostáva po celý čas simulácie na úrovni dajakej, na začiatku experimentu zvolenej konštanty. To síce na jednej strane zlepšuje komunikáciu s čitateľom, ale na druhej strane sa vo viacerých ohľadoch odlišuje od ekonomickej reality. Existujú viaceré vnútorné dôvody, o vonkajších perturbáciách ani nehovoriac, ktoré by sme mohli pomenovať ako príčiny časovej fluktuácie koeficientu a . Nebudeme sa teraz nimi zaoberať, pretože my by sme chceli v tomto príspevku ukázať, aký vplyv na činiteľ k bude mať práve rezignácia na predpoklad konštantnosti koeficientu a . Najjednoduchším riešením je predpokladať, že pôvodne konštantný koeficient a bude mať „prívesok“ $\pm \Delta a$, ktorý sa bude v určitom intervale meniť náhodne (v prostredí STELLA ho

budeme tvoriť generátorom náhodných čísel v rovnakých instantných bodoch času ako v prípade činiteľa k). Novú situáciu znázorňuje piktogram na obrázku 6, a výsledok simulácie na obrázku 7.

Obrázok 6

Piktogram nového modelu so vstavaným generátorom náhodných čísel

**Piktogram modelu rozšíreného
o generátor náhodných čísel**



Pripomíname – v záujme toho, aby bol čitateľ „v obraze“ –, že niektoré znázornené režimy v prostredí STELLA sú vyvolané nastavením rovníc, ako je to zapísané v nasledovných riadkoch:

$$k(t) = k(t - dt) + (\pm k) * dt$$

$$\text{začiatkové } k = 0.1,$$

prítoky:

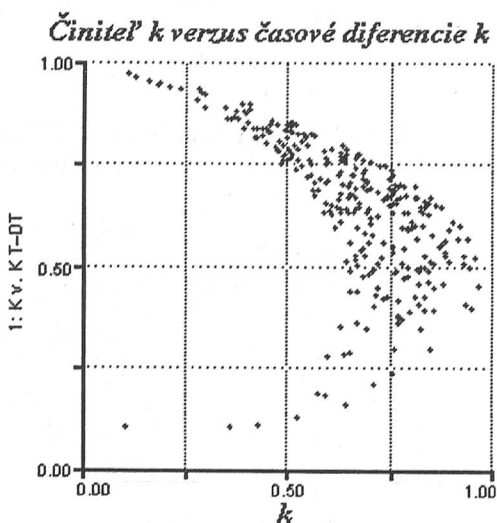
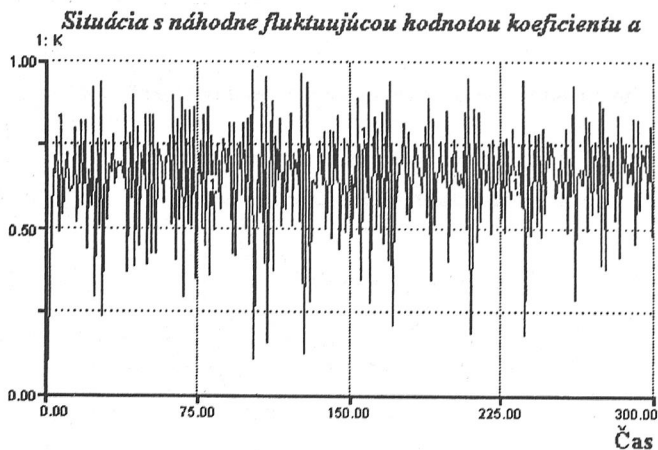
$$\pm k = \left((a * (k^{0.7}) * (1 - k)^{0.8}) - k \right) / dt$$

a = hodnoty, ktoré autori zvolili ako experimentátori ladiacim „kolíkom“, skončili hodnotou $a = 2.78125$, čo, ako sme už uviedli, vidíme na obrázku 5.

$$kt - dt = \text{oneskorenie } (k, dt)$$

Z horného grafu na obrázku 7 „nevyčítame“, na prvý pohľad, čo sa vlastne deje, keď koeficient a sa podrobí fluktuáciám. Veci sa trochu vyjasnia, keď sa pozrieme na spodný graf. Tam jasne vidíme, že krivka Henonovho atraktora (Hena) sa rozťahla na akýsi atraktorový mesiačik. Jednotlivé riešenia totiž náhodne odskakujú od krivky Hena. Rozdiel od predchádzajúcich situácií, hoci sa im horný graf obrázku 7 veľmi podobá, je v tom, že teraz každý instantný bod predstavuje samostatný režim. Predtým sme mali jediný režim pre všetky instantné body intervalu dĺžky 100. Pre lepšiu viditeľnosť „histórie“ evolúcie pod vplyvom náhod sme rozťahli interval na dĺžku 300 jednotiek času. Takže teraz máme 299 náhodných režimov.

Obrázok 7

Rozličné režimy naskakujúce pri fluktuujúcej hodnote a 

V predchádzajúcich prípadoch experimentátor menil hodnoty koeficientu a , pričom výsledkom bola evolúcia k vo zvolenej dĺžke intervalu, t. j. v danom prípade 100 jednotiek času. V prípade zobrazenom na grafoch obrázku 7 experimentuje v jeho zastúpení generátor náhodných čísel. Na neho prejde úloha experimentovania s intervalom, v ktorom generátor náhodných čísel (GNČ) „nahadzuje“ jednotlivé čísla do evolučnej postupnosti. To znamená, že ak už zvolil interval pre GNČ, potom v tomto intervale bude GNČ generovať nezávisle od neho celkom autonómny evolučný príbeh. Situácia, ktorá je zachytená na obrázku 7, má taký široký interval, že zachycuje aj pásmo, v ktorom sa „rodia“ chaotické režimy. Konkrétne,

GNČ pracuje v intervale: $\langle 0,85; 1,85 \rangle$, t. j. nový člen *Náhoda*, potom koeficient a bude fluktuovať v rozsahu $a = \langle 0,01; 2,75 \rangle$, čiže sa bude môcť náhodne pohybovať aj v pásme, v ktorom sa rodí chaos – bude sa dostávať „na hranu chaosu“, alebo aj rovno do neho.

Zavedenie predpokladu náhodnej fluktuácie hodnoty koeficientu a má vážny kvalitatívny vplyv na celý proces – *fluktuácie nedovolia, aby ekonomický systém zotrval v chaotickom režime dlhšie než v danom instantnom bode!*

Možno povedať, že je to veľmi názorná ilustrácia pôsobenia neviditeľnej ruky v podmienkach trhovej ekonomiky. Inak povedané, našli sme démona, ktorý riadi tú „neviditeľnú ruku“.

V našom prípade virtuálnej evolúcie je to generátor náhodných čísel a v objektívnej hospodárskej realite je to premenlivosť hodnoty koeficientu a , ktorá je zapríčinená slobodným rozhodovaním individuálnych autentických subjektov, ktoré pôsobia na trhu, respektíve v celej ekonomike, ba v spoločnosti ako celku.

V situácii, ktorú sme práve opísali, ide vlastne o pochopenie toho, že každý jeden zo slobodne sa rozhodujúcich subjektov trhu prispieva, bez toho, aby to chcel, dokonca, bez toho, aby si to uvedomoval, k vytváraniu toho skrytého démona. Táto zvláštna entita zrejme naozaj nie je ničím iným než čírym generátorom náhodných čísel.

To však už nie je iba metafora, ale objektívne realita, akokoľvek sa nám to zdá byť absurdné. Totiž, skupina slobodne sa rozhodujúcich ľudí – ak títo ľudia netvoría, či už dohodami a zmluvami potvrdené alebo iba „džentlmenské“ dohody – sa v dajakej presnejšie nešpecifikovanej situácii stáva súhrnným generátorom náhodných čísel.

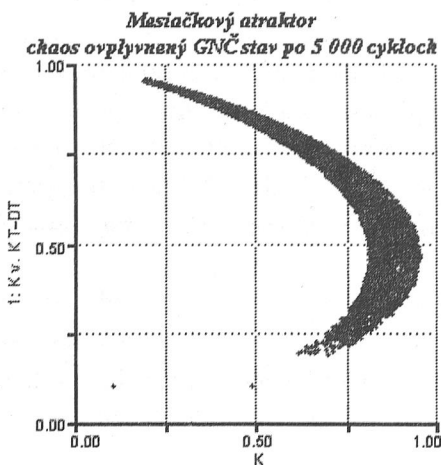
Stručný záver z toho, čo sme naformulovali do ostatného odstavca: ...*!!!skupina slobodne sa rozhodujúcich ľudí, to je súhrnný generátor náhodných čísel!!!*... Inak povedané, ak sa agent na trhu nemôže slobodne rozhodovať, *trh ako celok nemôže nadobudnúť vlastnosť kognitívneho systému*. Lenže, ak sa trh neučí, potom akýže je to trh a načo by aj bol taký pseudotr, ktorý sa nevie učiť?

Bohužiaľ, slovenská realita svedčí o tom, že za uplynulých 12 rokov sme dokázali vytvoriť len pseudotr, ktorý sa nevie učiť! Škoda, že sme medzitým akosi pozabudli na heroické sľuby, ako perfektne to všetko vyrieši „šoková terapia“.

V záujme toho, aby boli viditeľnejšie kontúry atraktora narušené outputom GNČ, sme predĺžili interval evolúcie až na 5 000 cyklov, máme teda 4 999 instantných bodov. Dostali sme ostré ohraničenie atraktorového mesiacika, čo pri pozorovaní objektívnej ekonomickej reality je absolútne vylúčené. Dôvody prečo, zrejme ani netreba uvádzať.

Obrázok 8

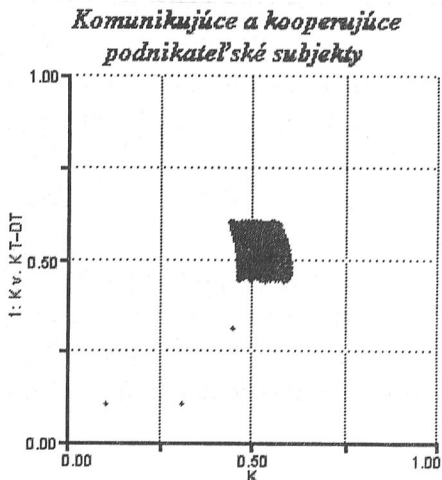
Zviditeľnenie kontúr mesačikového atraktora



Experiment vo virtuálnom laboratóriu nám pomohol uvidieť a pochopiť kvalitatívne vlastnosti už opísaného makroekonomického modelu. Ak by sme mali instantné body v intervale relevantnom k priemernej dĺžke života výskumníka, dostali by sme informáciu o polohách len niekoľkých desiatok jednotlivých bodov, z čoho by sme nevedeli odvodiť tvar atraktora, ku ktorému sú prirahované jednotlivé riešenia rozhodujúcich sa agentov. Dnes bežne dostupný PC nám výsledok ukáže za menej než jednu minútu. O tom, aký veľký význam to má pre poznávací proces, vypovedá snímka na obrázku 9.

Obrázok 9

Komunikujúci a kooperujúci agenti zužujú interval fluktuácie GNC



Na obrázku 9 sme zviditeľnili výsledok experimentu na simulačnom modeli s takými vloženými predpokladmi, ktoré napodobňujú komunikáciu a kooperáciu medzi agentmi ekonomiky (súčasný ITT, mobil, a najmä internet to umožňujú na vysokej úrovni aj v objektívnej ekonomickej realite, napríklad *e-business*, *e-commerce* a podobne). Táto nová situácia vedie k zníženiu hladiny neurčitosti v hospodárstve. Inak povedané, „elektronizácia a informatizácia“ hospodárskych, a najmä podnikateľských aktivít výrazne zužujú pásmo, v ktorom GNČ „vyrába“ náhody. Dá sa to napríklad vysvetliť aj tým, že sa výrazne zvyšuje hladina kvality a efektívnosti verifikácie toho, či je dôvera, ktorou agent obdaril partnera (-ov), opodstatnená. Tým sa zároveň znižuje hladina neistoty, odbúrava sa idiosynkrázia z rozhodovacieho procesu a riziká sú kvalitnejšie a presnejšie vymedzené. Musíme však dodať, že je to „dvojsmerná zbraň“!

Ide totiž o to, že v spoločnosti nekomunikujú a nekooperujú s podporou uvedeníh nových vymožeností len „paretovské“ subjekty, ale aj také, ktoré tvoria koalície proti iným jednotlivcom či aj skupinám, a to nielen legálne, ale s využitím všetkých iných možných príležitostí, a to dokonca aj zločineckého typu (organizovaná hospodárska kriminalita je dakedy na vyššej úrovni než orgány, ktoré ju majú potláčať!). Preto treba byť v takýchto situáciách veľmi opatrný pri formulácii záverov, lebo veď to môže byť presne naopak, ako sme to už konštatovali, keď sme robili závery z kladnej pozície.

Isteže by bolo zaujímavé podrobnejšie sa venovať týmto otázkam, na to však v tomto príspevku niet dost' miesta a nebolo to ani cieľom autorov. Táto téma je však nielen zaujímavá, ale veľmi dôležitá najmä v súvislosti so vstupom do euroatlantických štruktúr. Na tomto mieste však nemôžeme urobiť viac, než poukázať na to, že modelovacie prostriedky tak matematicko-fyzikálne, ako aj počítačové (virtuálne) laboratóriá sú dnes tak rozvinuté, že umožňujú veľmi inštruktívne zobrazovať situácie spracúvané teóriou antagonistických hier a teóriou riešenia konfliktov.

2. Sekundárna úprava schumpeterovského modelu cyklov

Ako je známe, v štandardnej forme zápisu majú Lorenzove rovnice takýto tvar:

$$\frac{dq_1}{dt} = oq_2 - oq_1 \quad (4)$$

$$\frac{dq_2}{dt} = -q_1q_3 - q_2 + rq_1 \quad (5)$$

$$\frac{dq_3}{dt} = q_1q_2 - bq_3 \quad (6)$$

kde

q_1, q_2, q_3 – (renormalizované) stavové charakteristiky systému,
 o, r, b – charakteristické konštanty.

Možno všeobecne dokázať, že tých rovníc, ak majú pripustiť aj chaotický režim, môže byť menej ako tri, preto sa v tejto práci pokúsime pridať k známym dvom rovniciam opisujúcim „schumpeterovské tikanie“ ešte aj tretiu rovnicu.

3. Rozšírený model „schumpeterovských hodín“

O ekologických cykloch je už pomerne veľa literatúry (pozri napr. [15; 2; 28]). Väčšinou ide o demonštráciu vzniku chaosu následkom pravidelných fluktuácií, ktoré sa superponujú na základné dominantné procesy, resp. o produkovanie známeho Feigenbaumovho scenára vzniku chaosu postupným zdvojitím stacionárnych stavov. Je nám známe, že v ostatných rokoch sa vyskytli pokusy o priamu aplikáciu Lorenzových rovníc na simulovanie ekonomických procesov.⁴ Namiesto odvolávania sa na západných autorov pokúsime sa na jednom konkrétnom príklade ukázať, že takýto prístup by sa mohol ukázať ako užitočný a perspektívny aj v nami navrhovanej podobe.

Jednoduchý model vysvetľujúci vznik schumpeterovských oscilácií sa týka kvalifikácie procesov charakterizujúcich interakciu medzi výrobnými procesmi a ich výstupmi. Skúma správanie skupiny investorov, z ktorých jedna časť (N_1) preferuje expanzné investície, druhá (N_2) racionalizačné investície. Parameter

$$x - \frac{N_1 - N_2}{N}, N - N_1 + N_2 \quad (7)$$

definuje jednu stavovú veličinu a tzv. alternátor vyjadrený koeficientom a , determinujúci ekonomickú klímu, druhú stavovú charakteristiku. ňou je určená tranzitná pravdepodobnosť charakterizujúca prechod z jednej kategórie investorov do druhej. Pre tieto dve stavové veličiny sa modelujú evolučné rovnice do tvaru [3]

$$\frac{dx}{dt} = A[sh(a + kx) - x \ ch(a + kx)] \quad (8)$$

$$\frac{da}{dt} = -B[a_0 sh(ax) + a \ ch(ax)] \quad (9)$$

⁴ Pre nedostatok miesta sa v prezentovanom príspevku nebudeme zaoberať jednotlivými aplikáciami, pretože ich počet dosť prudko rastie. Čitateľa, ktorý sa hlbšie zaujíma o predmetnú problematiku, odkazujeme na diela, ktoré sme zaradili do zoznamu literatúry. Autori sú pripravení aj na odbornú diskusiu, resp. predvedú experimentálne laboratória, ktorými disponuje KEM FEI STU Bratislava.

kde

k – tzv. koordinátor,
koeficienty A, B, a_0 – konštanty.

Pre určité vhodné hodnoty týchto riadiacich konštánt ($k = 1,6$; $a_0 = 0,5$; $\alpha = 4$; $B/A = 0,5$) rovnice (8) a (9) poskytujú periodické (prakticky harmonické) riešenie. Principiálne však nemôžu poskytnúť riešenie zodpovedajúce chaotickej dynamike. Ak sa tak stalo, treba tento systém rovníc určitým spôsobom modifikovať. Urobíme to v troch krokoch:

1. Alternátor (a) a koordinátor (k) sú nezávislé charakteristiky, ktoré sa na celkovej ekonomickej klíme podieľajú len aditívne, a nie multiplikatívne. Pravdepodobnejšie sa však zdá byť multiplikatívne pôsobenie, preto – v snahe zaviesť do ich vzájomného vzťahu určitú nelinearitu – možno argument ($a + kx$) vo funkcii (8) pretransformovať na tvar $k(a + x) = ka + kx$, takže evolučná rovnica (8) nadobudne tvar

$$\frac{dx}{dt} = A[sh k(x+a) - x ch k(x+a)] \quad (10)$$

2. Keď pripustíme možné (a veľmi pravdepodobné) vzájomné ovplyvňovanie alternátora a koordinátora, potom je prirodzené, že do rovnice (10) musí vstúpiť aj parameter k . Z dôvodov, ktoré objasníme neskôr, možno namiesto tvaru (10) navrhnúť závislosť typu

$$\frac{da}{dt} = -B[sh k(x - k_0) + a ch k(x - k_0)] \quad (11)$$

kde

k_0 – nová charakteristická konštanta, ktorá do určitej miery nahrádza konštantu a_0 .

$$\frac{dk}{dt} = C[sh(\delta a) - k ch(\delta a)] \quad (12)$$

kde

δ – ďalšia charakteristická konštanta (možno však zvoliť aj $\delta = 1$ a tým tento koeficient z uvedenej závislosti eliminovať a tak ho zjednodušiť).

3. Ako uvidíme, požiadavky, aby sa dynamika skúmanej triedy ekonomických systémov mohla opísať rovnicami analogickými Lorenzovým rovniciam, vedie k záveru, že koordinátor (k) treba považovať za tretiu stavovú veličinu podliehajúcu evolučnej rovnici tvaru (10).

Rovnice (10 – 12) predstavujú tri evolučné rovnice rozšíreného modelu schumpeterovských hodín, o ktorých už pomerne ľahko dokážeme, že v limitnom prípade predstavujú typ Lorenzových rovníc. Stačí predpokladať, že máme do činenia s argumentmi hyperbolických funkcií menšími ako 1, takže môžeme použiť aproximácie

$$\text{sh } y \sim y$$

$$\text{ch } y \sim 1$$

Za týchto predpokladov prejdú rovnice (10 – 12) do tvaru

$$\frac{dx}{dt} = A[k(a+x) - x] - A[ka - (1-k)x] \quad (13)$$

$$\frac{da}{dt} = B[(k_0 - x)k - a] \quad (14)$$

$$\frac{dk}{dt} = C[(\delta a - k)] \quad (15)$$

Z rovnice (14) vyplýva aj názorný zmysel novej konštanty k_0 : pre $x > k_0$ sa časový vývoj alternátora približuje k nule.

Zavedením označení $k = q_1$, $a = q_2$ a $x = q_3$ a preznačením príslušných konštant dospejeme k rovniciam

$$\frac{dq_1}{dt} = b_1 q_2 - c_1 q_1 \quad (16)$$

$$\frac{dq_2}{dt} = -b_2 q_1 q_3 - c_2 q_2 + d_2 q_1 \quad (17)$$

$$\frac{dq_3}{dt} = b_3 q_1 q_2 - c_3 (1 - q_1) q_3 \quad (18)$$

Vidíme, že pokiaľ ide o štruktúru, je – okrem faktora $(1 - q_1)$ v rovnici (18) – úplná formálna podobnosť medzi rovnicami (16 – 18) a rovnicami (4 – 6). Možno však predpokladať nerovnosť $q_1 < 1$, čím by sa nesymetria odstránila, a navyše, zavedením „pre-normalizovaných“ stavových premenných by bolo možné aj počet radiacií konštant redukovať. Tým by sme dokázali, že aj na ekonomické systémy možno aplikovať Lorenzove rovnice.

4. Diskusia

Predpoklady použité pri tvorbe rozšíreného Schumpeterovho modelu oscilácií sa možno zdajú príliš špeciálne, avšak ukazujú sa ako nevyhnutné, ak sme chceli dosiahnuť úplný súhlas s tvarom Lorenzových rovníc. Treba si však uvedomiť, že aj samotné Lorenzove rovnice sú aproximatívne a je celkom možné, že aj ich modifikovaná forma pripúšťa chaotický režim.

Je napríklad známe, že aj určité chemické systémy vykazujú takéto režim svojej činnosti (Belousovove-Žabotinského systémy), avšak príslušné evolučné rovnice (napr. v modeli tzv. oregonátora) vedú na trošku odlišný tvar. Ak by to pre vznik deterministického chaosu postačovalo, potom by rovnicu (8) vôbec nebolo potrebné modifikovať.

Ukázalo sa, že v modeloch správania anorganických systémov môže k vzniku deterministického chaosu prispieť aj priestorová nemohogenita a s ňou súvisiaca „difúzia“. V modeloch ekonomických systémov sa doteraz s týmto fenoménom explicitne neuvažovalo, je však celkom prirodzené, že analogické procesy by mohli mať svoje miesto aj v nich.⁵ Ak sa napríklad koncentrácia investorov daného typu mení od lokality k lokalite (osobitne, ak vezmeme do úvahy aj investície v „zahraníčí“), potom je logické, že nedostatok vhodných investorov na jednom mieste by mohol pritiahnuť takýchto investorov z lokalít, kde ich je nadbytok. To by mohlo vyvolať „difúzny“ tok podnikateľov úmerný rozdielu príslušných koncentrácií, takže matematicky by sa mohol tento proces vyjadriť aj v ekonómii vzťahom analogickým Fickovmu zákonu známemu z fyziky, t. j. zákonu

$$j = K \frac{\partial N}{\partial x}$$

pričom konštantu K by sme mohli nazvať *ekonomický difúzny koeficient*. V príslušnej evolučnej rovnici by sa tento fenomén prejavil členom

$$K \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$$

Pri prechode na Lorenzove rovnice by sme mohli vziať na zreteľ fakt, že ak sú príslušné „gradients“ dostatočne malé, potom možno priestorovú závislosť vyjadriť exponenciálnou funkciou typu e^{fx} , preto člen K možno jednoducho zameniť výrazom Kf^2N . Keby sme výpočet vykonali s relatívnou početnosťou investorov (x ako v rovnici (8)), potom by k tejto rovnici na pravej strane pristúpil člen Kf^2x . V konečnom dôsledku by to ovplyvnilo konštantu c_3 v rovnici (18).

Vidíme, že metódy používané pri analýze evolučných rovníc v anorganickom svete sú principiálne použiteľné aj v ekonómii, kde by okrem iného mohli priniesť aj logické vysvetlenie toho, že sa tam často (ba prakticky vždy) vyskytuje aj chaotická dynamika, a to aj vtedy, keď sa do evolúcie ekonomických systémov nevnučuje „zvonku“ nijaký „šum“ či náhodné perturbácie.

Stručné závery

V predloženom príspevku sme sa pokúsili ukázať niektoré vlastnosti matematicko-fyzikálnych a počítačovo-simulačných (virtuálne-experimentálnych) prístupov ku skúmaniu takých komplexných ekonomických procesov, ktoré nemožno uspokojivo riešiť ortodoxnými metódami economickej vedy. Konkrétne sme sa

⁵ V ostatných rokoch sme zaznamenali niekoľko pokusov o výboje ekonómov aj týmto smerom. Vývoj v týchto oblastiach je pomerne rýchly, preto nabádame k veľkej ostražitosti a varujeme pred nekritickým prijímaním ďalekosiahlych záverov.

zamerali na javy chaosu, ktoré sa vynárajú najmä vtedy, keď sa pokúšame hľadať odpovede na otvorené problémy v strednom a dlhšom horizonte ekonomickej evolúcie.

Prístupy, na ktoré sme poukázali, resp. z ktorých sme ukázali niektoré fragmenty, svedčia o tom, že môžu byť prínosom k lepšiemu pochopeniu nových javov v podmienkach informačnej spoločnosti, v poznatkovo osnovanej ekonomike, v učenívej ekonomike a podobne. Hoci výskum vo svete naberá v ostatných rokoch na obrátkach, slovenská ekonomická veda týmto novým, ponúkajúcim sa metodickým prístupom nevenuje takú pozornosť, akú by si zaslúžila. Akosi sa v slovenskej ekonomickej komunite nechce brať na vedomie, že práve prechodné obdobie „od socializmu ku kapitalizmu“ je vrchovato naplnené rozličnými parciálnymi, ale aj celostnými problémami, ktoré vytrvalo odolávajú pokusom analyzovať ich „osvedčenými“ metódami. V príspevku naznačené možné cesty ich poznávania umožňujú prinajmenšom lepšie kvalitatívne vysvetlenia, resp. fenomenologické závery odvodené v experimentálnych laboratóriách, vytvorené v niektorých osvedčených programovacích jazykoch, ktoré možno prevádzkovať aj na bežne dostupných PC. Úsilie, ktoré v tomto smere vyvíjajú matematici, fyzici,⁶ „informatici“, ekonómovia, teoretici riadenia systémov a ďalší odborníci pracujúci na FEI STU Bratislava, možno v terajšej situácii hodnotiť ako rásny krok vpred.

Pre slovenskú ekonomicкую vedu, národné hospodárstvo a pre celú spoločnosť v kontexte včleňovania sa SR do „euro-atlantických“ štruktúr a globalizujúceho sa sveta by však bolo dozaista lepšie, keby sa formulácia z predchádzajúcej vety mohla vymeniť za: „... jedným zo skromných príspevkov k riešeniu akútnych problémov v oblasti vývinových anomálií slovenského národného hospodárstva sú aj výsledky učiteľov a výskumníkov pracujúcich na FEI STU Bratislava.“

Došlo 22. 3. 2001

Literatúra⁷

- [1] BENHABIB, J. – DAY, R. H.: A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1982, č. 4, s. 37 – 55.
 [2] DAY, R. H. – PING CHEN. (ed.): *Non-linear Dynamics and Evolutionary Economics*. New York/Oxford: Oxford University Press 1993.

⁶ Pre štandardne ladených ekonómov treba upozorniť na to, že laboratórium na Katedre fyziky, v ktorej sa prevádzkuje multiparalelná počítačová platforma (alias nekonvenčný „superpočítač“), skrýva v sebe obrovské potencie na simulácie veľmi rozsiahlych a komplexných ekonomických modelov, ktoré môžu – závermi z nich odvodenými – tvoriť významný zdroj nepredpojatých informácií a vedomostí pri tvorbe vízií a stratégií dlhodobého rozvoja slovenského hospodárstva a celej spoločnosti.

⁷ Napriek zdanlivej rozsiahlosti tohto zoznamu sú uvedené diela iba torzom toho, čo sa v danej nekonvenčnej oblasti ekonomickej literatúry v ostatnom čase publikuje. Zainteresovaného čitateľa odkazujeme na publikácie uvedené na internetovej adrese <http://www.csu.edu.au/ci/>

- [3] GOODWIN, R. M.: A Non-linear Theory of Cycle. Review of Economics and Statistics, 1950.
- [4] GOODWIN, R. M.: A Growth Cycle. In: FEINSTEIN, C. H. (ed.): Socialism, Capitalism, and Economic Growth. Cambridge: Cambridge University Press 1967, s. 54 – 58.
- [5] GOODWIN, R. M.: The Economy as an Evolutionary Pulsator. Journal of Economic Behavior and Organization, 1986, č. 7, s. 341 – 349.
- [6] GOODWIN, R. M.: Chaotic Economic Dynamics. Oxford: Oxford University Press 1990.
- [7] HAKEN, H.: Phys. Lett. A 53, 1975, 77.
- [8] HANNON, B. – RUTH, M.: Modeling Dynamic Economic Systems (With Software STELLA). Berlin: Springer-Verlag 1997.
- [9] HANNON, B.: Synergetics and Dynamic Instabilities. GALIOLI, G. – HAKEN, H. (eds.) Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo: North-Holland 1988.
- [10] KREMPASKÝ, J.: Deterministický chaos pri tvorbe galaxií a hviezd. Trnava: Acta Univ. Trynaviensis 2001.
- [11] KREMPASKÝ, J. – KLUVANEK, J.: Deterministic Chaos in Photo-conductivity. [6th Conf. Proc. Physics and Chemistry of Molecular Systems.] Brno 2001.
- [12] LORENZ, E. N.: Deterministic Non-Periodic Flow. Journal of Atmospheric Sciences, 20, 1963, s. 130 – 141.
- [13] LORENZ, H.-W.: Multiple Attractors, Complex Basin Boundaries, and Transient Motion in Deterministic Economic Systems. In: FEICHTINGER, G. (ed.): Dynamic Economic Models and Optimal Control. Amsterdam: North-Holland 1992, s. 411 – 430.
- [14] LORENZ, H.-W.: Non-linear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Second Edition. Berlin: Springer-Verlag 1993.
- [15] LORENZ, H.-W.: Non-linear Economic Dynamics. Berlin: Springer-Verlag 1997.
- [16] MOSEKILDE, E. – LARSEN, R. E. – STERMAN, J. D. – THOMSEN, J. S.: Non-linear Mode-Interaction in the Macroeconomy. Annals of Operations Research, 37, 1992, s. 185 – 215.
- [17] POHJOLA, M. T.: Stable, Cyclic and Chaotic Growth: The Dynamics of a Discrete Time Version of Goodwin's Growth Cycle. Zeitschrift für Nationalökonomie, 41, 1981, s. 27 – 38.
- [18] ROMER, D.: The New Keynesian Synthesis. Journal of Economic Perspectives, 1993, č. 7, s. 5 – 22.
- [19] PRIGOGINE, I. – STENGERS, I.: Order out of Chaos. New York: Bantam 1984.
- [20] PUU, T.: Non-linear Economic Dynamics. Third Edition. Berlin: Springer-Verlag 1993.
- [21] PUU, T.: Non-linear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Berlin: Springer-Verlag 1997.
- [22] ROSSER, J. B., jr.: Chaos Theory and the New Keynesian Economics. Manchester. The Manchester School of Economic and Social Studies, 1990/58, s. 265 – 291.
- [23] ROSSER, J. B., jr.: From Catastrophe to Chaos: A General Theory of Economic Discontinuities. Boston: Kluwer 1991.
- [24] ROSSER, J. B., jr.: Chaos Theory and Rationality in Economics. In: ELLIOTT, E. – KIEL, J. D. (eds.): Chaos Theory in the Social Sciences. Ann Arbor: University of Michigan Press (forthcoming) 1995.
- [25] ROSSER, J. B., jr.: Chaos Theory and Post-Walrasian Macroeconomics. In: COLANDER, D. (ed.): Beyond the Microfoundations of Macro: Post-Walrasian Macroeconomics. Cambridge: Cambridge University Press (forthcoming) 1995.
- [26] ROSSER, J. B., jr. – VCHERASHNAYA-ROSSER, M.: Long Wave Chaos and Systemic Economic Transformation. World Futures, 39, 1994, s. 197 – 207.
- [27] ROSSER, J. B., jr. – VCHERASHNAYA-ROSSER, M.: Macroeconomic Collapse During Systemic Change. In: KNELL, M. (ed.): Stabilization and Growth in Central and Eastern Europe. Aldershot: Edward Elgar (forthcoming) 1995.
- [28] SCHUMPETER, J. A.: Konjunkturzyklen, eine theoretische, historische und statistische Analyse des kapitalistischen Prozessen. 2. Gottingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1961.
- [29] SPARROW, C. T.: The Lorenz Equations. Berlin: Springer-Verlag 1982.

- [30] THOMSEN, J. S. – MOSEKILDE, E. – STERMAN, J. D.: Hyperchaotic Phenomena. In: *Dynamic Decision Making*. SAMS, 1992, zv. 9., s. 137 – 156.
- [31] THOM, R.: *Stabilite Structurale et Morphogenese*. Reading: Benjamin 1972.
- [32] VARIAN, H. R.: A Catastrophe Theory and the Business Cycle. *Economic Inquiry*, 17, 1979, s. 14 – 28.
- [33] WEIDLICH, W. – HAAG, G.: *Concepts and Models of a Quantitative Sociology: The Dynamics of Interaction Populations*. Berlin: Springer-Verlag 1983.
- [34] WEIDLICH, W.: Physics and Social Science – the Approach of Synergetics. *Physics Reports*, 1991, zv. 204, s. 1 – 163.
- [35] ZEEMAN, E. Ch.: On the Unstable Behavior of the Stock Exchanges. *Journal of Mathematical Economics*, 1974, č. 1, s. 39 – 44.
- [36] ZHANG, W.-B.: *Synergetic Economics: Time and Change in Non-linear Economics*. Berlin: Springer-Verlag 1991.

EMERGENCE OF DETERMINISTIC CHAOS: LIMITED PASSAGE IN THE EVOLUTION OF ECONOMY

Ladislav ANDRÁŠIK – Július KREMPASKÝ

The core of the explanation in this paper deals with the secondary generalisation of the Schumpeter's oscillation model in economic systems. As already known, W. Weidlich and G. Haag made the first generalisation of the Schumpeter's evolution model by means of synergetics in [31]. The authors for the sake of better comprehensibility of the problem included in the text of their paper also a simpler and in wider economic community better known model, which however can also lead towards the emergence of deterministic chaos of the „classic“ Lorenz type (meteorologist E. N. Lorenz [12]). Having in mind the same aim, by bridging over both approaches in order to address better the readers, the authors avoided analytic mathematical means and used more comprehensive computer simulation and/or computer experimenting with traditional mathematical model changed into simulation model. This experimenting takes place in the STELLA toolbox.

In the innovated generalisation of Schumpeter's oscilation, the authors replaced the original two evolution equations by the three equations striving to demonstrate that these equations in the extreme case identify themselves with well-known Lorenz approach or may be with his reduced system of the three evolution equations describing the dynamics of climatic systems. That might mean that also evolutionary economic systems can tend towards the emergence of such chaotic regimes. This conclusion might explain the fact why economic oscillations bear in general the signs of chaotic dynamics, and the fact that Lorenz system of evolutionary equations is characterised by certain universality, as their validity proved itself in various systems qualitatively differing one from another. In recent 10 – 15 years, one discovered in scientific and special literature various applications of chaotic dynamics for economic brainteasers. In the attached list of

literature, the reader can convince oneself – the authors point out in the text at some interesting solutions.

The authors in their research of complex and adaptive economic systems gain new knowledge on the two mutually complementary tools:

- In the case of L. Andrášik dominate computer experiments based on simulation models of the latest generation, above all in the sphere of multiagent systems. Untraditional and unconventional simulation models designed in the Chair of economy and managements in the Department of Electrical Engineering and Informatics of the Slovak Technical University (KEM FEI STU) enable to generate artificial laboratories applicable for the basic economic research, teaching process, and for the authorities in the economic policy and entrepreneurial practice. It is interesting that evolutionary processes going on in these laboratories tend to fall into the chaos regime, actually also due to internal causes. These findings surprisingly well correspond to the objective economic development above all in the so-called transitive economies.

- In the case of J. Krempasky the physical and mathematical approach prevails. In this approach, objectively and formally is demonstrated the lifelong experience of the exact scientist. Nowadays, when many physicists all over the world engage themselves in the solutions of economic brainteasers, it is worth to mention that both authors cooperate in the convergence of the methods of physics and economy more than 20 years already. The subject that has brought them together is just the problem of non-linear dynamic systems, the theory of catastrophes, chaos and above all the aspiration to apply synergetic methods at the solution of social science analyses. After the lapse of long twenty years, one has to comment reluctantly that these aspirations did not find any understanding within Slovak economists and currently, when this problem area fully asserted itself in the world economic science we find sporadic import of knowledge from the works of the western authors.

Alas, one has to observe that most delay in this respect has been generated under the new regime, when during the eager surplus labour at the condemnation of the Marxist paradigm of the economic thinking one stressed relatively obsolete mode of the neo-classic economy.

That proved to be most conspicuous by raising the textbook of Samuelson and Nordhaus up to the altar in the role of solitary Holy Script. The authors wish by no means to discredit the quality of this textbook acknowledged throughout the world, they point out also by this contribution, that the latest trend within the framework of the main stream economics accept many newer achievements from the area represented by non-linear dynamics applications. After all, Samuelson is known by his acceptance of new achievements of economics and was able to include masterly these new achievements into the cited textbook throughout of his all scientific and tutorial career. The authors feel as disparagement of Samuelson's lifelong effort the aspiration of several Slovak

economists to conserve the knowledge of Samuelson's earlier edition textbook of in our conditions.

The authors of this contribution want at the same time express their discontent with the fact that the Journal of Economics as an academic periodic culpably resigned to the development of the academic economic science. This deviation went on throughout an unbearably long time interval and was compensated by pragmatic articles and utilitarian analyses of the economic practice. The authors accept, however, that social order as well as other problems, as for instance financing, made the publisher and editorial board to function in such undue solutions. However, such a frontal retreat from the mission of academic journal that we witnessed in recent years was certainly not justified.

When we abandon the strict mathematical definition, we can the dynamic system call a „complex“ one provided it is non-linear and suitable to characteristics having at least three following features:

- a) discontinuity in time in its condition variables,
- b) sensitive dependence on initial conditions, or
- c) aperiodicity („irregularity“) of fluctuation shapes.

Most important is, however, that such features should occur endogenously inside the dynamic system itself and not as external perturbations in such an appearance as for instance series of random shocks used by classic economy in its models of the real industrial cycle. This gives our system Keynesian character.

Should we want to enumerate at least a concise list of approaches of the complex dynamics applied in economics, we should mention at least the theory of catastrophes, systems of interactive particles or cells, fractals, evolutionary synergetic, odd attracts, and above all the theory of chaos, the application of which is the theme of this subscription.

From the point of view of better orientation of the reader, we mention at least selectively the following development sections on the relevant problem, while what we only suggest or name is explained in more detail in the main text. As one generally knows currently more today, the theory of chaos has begun by the research results of the meteorologist E. N. Lorenz (1963). This theory based on the idea of sensitive dependence of the dynamic process on given initial conditions was further developed by Li and Yorke (1975), and later by various mathematical personalities. Plainly speaking small changes in the parameter value at the process start or small changes of the initial value of the agent delivering impact to the process are sufficient to lead the system towards the behaviour which differs dramatically from the initial small change. There is a metaphoric example well known from current literature as an effect of the wave of butterfly wings: „... butterfly wings wave over Hong-Kong and result is a hurricane over Florida.“

This effect, when related to the economic problems is used for instance for the denial of the information value relevance in the theory of rational expectations in less stable conditions. Let us add that just in transitive economies the conditions are strongly

non-stationary, or have a high rate of uncertainty. For instance in Slovakia this high uncertainty rate is instigated or even accelerated to the unbearable magnitude the Government and Parliament by their legislation process that smashes the quality of Constitution, Acts and other state regulations of equal statute. Alas, many Acts adopted also during the government period of the recent coalition instead of strengthening and stabilising the state and society have taken over fundamentally destructive character.

In the course of the past 20 – 25 years, one of the authors in the Journal of Economics published many papers and articles for discussion, where he pointed out at the need to research more intensely into the problem of the influence of chaotic dynamics in market economies that strongly depend on stock-exchange speculations and voluntary behaviour of central banks. He criticised some approaches that oversimplified objective economic reality. And criticised also concrete models of such authors as Schinassy (1981), Benhabib and Day (1982); Grandmont (1985), who at their times were the pioneers in exploiting these tools.⁸

In any case, however after the lapse of years one should say that the potential of numerous tools suitable for the research of chaotic dynamics in general as well as in the economic research in particular have not yet been exploited in full. Some of these uncertainty cases can be considered to be similar as are the sources of fundamental uncertainty of Keynes' type. In the presented contribution we try to prove, how one can endogenously generate aperiodicity and typical chaos within the framework of modelling of the chaotic dynamics related to the economic development.

⁸ Due to the very rich list of literature citing important world authors we have decided to omit auto-citations of the authors of this paper.