Economic Analysis & Policy Group

Working Paper Series

WP No. 1

Neoclassical and Keynesian View on a Growth of Economy of SR

Neoklasický a keynesovský pohľad na rast ekonomiky SR

EAPG Working Paper Series

Department of Economic Policy
Faculty of National Economy
University of Economics in Bratislava

Published by:
o. z. SOLIM
Bakošova 24
841 03 Bratislava

Phone: +421 905 157 601
Email: eapg@ozsolim.sk
Web: www.ozsolim.sk/eapg

Author: Daniel Dujava

Date: 12.8.2010

Language: Slovak

ISSN 973-123-876-20

EAPG Working Paper Series

WP No. 1

Neoclassical and Keynesian View on a Growth of Economy of SR

Neoklasický a keynesovský pohľad na rast ekonomiky SR

March 2010

Ing. Daniel Dujava

Institute of Economic Research SAS
Šancová 56
811 05 Bratislava

Email: daniel.dujava@savba.sk
Phone: +421 907 484 129

Peer-reviewed working paper

This working paper is published as a part of research project VEGA2/0068/09

Neoclassical and Keynesian View on a Growth of Economy of SR

Neoklasický a keynesovský pohľad na rast ekonomiky SR

Daniel Dujava

Abstract

In the study we focus on theoretical and practical aspects of neoclassical models of economic growth, i.e. Solow-Swan model and Ramsey-Cass-Koopmans model and keynesian Kaldor model. We explain theory of Solow-Swan model and calibrate parameters of the model according to economy of Slovak Republic. We compare Solow-Swan model to Kaldor model and estimate main functions of Kaldor model for the economy of SR. We explain means of making propensity to save endogenous in Ramsey-Cass-Koopmans model and we examine whether endogenous propensity is useful in describing economy of SR.

Keywords:

Economic growth, Harrod-Domar model, Kaldor model, Ramsey-Cass-Koopmans model, Solow-Swan model, technology growth

JEL classification: B22, E20, O11

Abstrakt

V štúdii sa sústreďujeme na teoretické a praktické aspekty neoklasických modelov ekonomického rastu, t.j. Solow-Swan modelu a Ramsey-Cass-Koopmans modelu a keynesovského Kaldorovho modelu. Vysvetľujeme teóriu Solow-Swan modelu a parametre modelu kalibrujeme na ekonomiku Slovenskej Republiky. Solow-Swan model porovnávame s Kaldorovým modelom a odhadujeme hlavné funkcie Kaldorovho modelu pre ekonomiku SR. Vysvetľujeme spôsob endogenizácie sklonu k úsporám v Ramsey-Cass-Koopmans modeli a skúmame, či endogénny sklon k úsporám umožňuje lepšie opísať vývoj ekonomiky SR.

Kľúčové slová:

ekonomický rast, Harrod-Domar model, Kaldorov model, kapitál, Ramsey-Cass-Koopmans model, Solow-Swan model, technologický pokrok

JEL klasifikácia: B22, E20, O11

Obsah

Úvod

V období rokov 1995 až 2010 vzrástol hrubý domáci produkt Slovenskej republiky na dvojnásobok. Ak neuvažujeme s krízovými rokmi 2009 a 2010, priemerné tempo rastu ekonomiky Slovenska dosahovalo 4,6%. Takýto prudký ekonomický rast so sebou prirodzene priniesol zvýšený záujem nielen o praktické stránky rastu, ale aj o jeho teoretické aspekty. Samozrejme, teória ekonomického rastu sa v období posledných štyroch dekád rozvíjala nebývalým tempom, pričom jej hlavnými medzníkmi boli nahradenie pokusov o dynamizáciu keynesovských modelov (Harrod 1939, 1942, Domar 1946, Kaldor 1957, 1962) neoklasickým modelom (Ramsey 1928, Solow, 1956, Swan 1956, Cass 1965, Koopmans 1965) a neskoršie prepracovanie neoklasického modelu rastu do modelov endogénneho rastu, t.j. vznik novej teórie rastu resp. endogénnych teórii rastu (Lucas 1988, Romer 1990). Neoklasický model ekonomického rastu však aj napriek svojim známym nedostatkom stále zostáva jedným zo základných kameňov súčasnej makroekonómie a predstavuje východiskový metodologický bod pre konštruovanie dokonalejších modelov. V našom článku sa venujeme otázke, či a ako dobre dokáže neoklasický model ekonomického rastu opísať vývoj ekonomiky SR. V prvej fáze pracujeme s jednoduchým Solow-Swan modelom, v ktorom je sklon k úsporám exogénny. Potom, ako preskúmame možnosti použitia keynesovského Kaldorovho modelu prechádzame k Ramsey-Cass-Koopmans modelu, v ktorom sklon k úsporám endogenizujeme .

1 Solow-Swan model ekonomického rastu

1.1 Filozofia Solow-Swan modelu

Robert M. Solow vo svojom revolučnom článku (Solow, 1956) skonštruoval slávny model, ktorý sa vďaka príspevkom Trevora W. Swana (Swan, 1956) zvykne nazývať Solow-Swan model. Solow v tomto modeli porušil Harrod-Domarovský predpoklad stáleho pomeru práce a kapitálu a stáleho pomeru kapitálu a produktu a *de facto* nahradil Leontiefovskú produkčnú funkciu neoklasickou produkčnou funkciou, v ktorom je možné prácu a kapitál vzájomne substituovať. Solow však zároveň ostal pri Harrodovskom predpoklade konštantného sklonu k úsporám.[1] Medzi ďalšie dôležité predpoklady modelu patrí konštantné a exogénne dané tempo rastu počtu pracovníkov a miera opotrebenia.

Logika Solow-Swan modelu je jednoduchá: V prvom období pri danej kapitálovej zásobe, danom počte pracovníkov a danej technológii vyprodukuje ekonomika produkt určený produkčnou funkciou. Časť produktu sa spotrebuje, časť sa usporí, pričom tento pomer je daný exogénne. Časť kapitálovej zásoby sa opotrebuje, avšak kapitálová zásoba sa zároveň zvýši o hrubé investície, ktoré sú rovné úsporám (čistý prírastok kapitálu, t.j. čisté investície, je teda rovný rozdielu hrubých investícií

[1] Pre vysvetlenie Harrod-Domar modelu čitateľa odkazujeme na prílohu 1.

a opotrebenia). Ekonomika vstupuje do druhého obdobia s väčšou kapitálovou zásobou. Počet pracovníkov sa taktiež zvýši exogénne danou mierou, kapitálová zásoba pripadajúca na jedného pracovníka (kapitálová vybavenosť) je však vyššia a preto je vyšší aj produkt na jedného pracovníka. Tento proces sa opakuje, až kým ekonomika nedospeje do stáleho stavu. Z dôvodu klesajúceho hraničného produktu kapitálu totiž v istom bode nastane situácia, že hraničný produkt z dodatočnej jednotky kapitálu bude práve rovný efektívnemu opotrebeniu – t.j. potrebe nahradiť opotrebovaný kapitál a potrebe rozšíriť kapitálovú zásobu z dôvodu rastúceho počtu pracovníkov. V tomto bode prestane kapitálová zásoba na jedného pracovníka rásť a rovnako prestane rásť aj produkt na jedného pracovníka. V dlhom období teda ekonomický rast chápaný ako rast produktu per capita[2] nie je možný.

Práve nemožnosť dlhodobého ekonomického rastu viedla k zavedeniu exogénneho technologického pokroku do modelu – technológia sa v každom období zdokonaľuje konštantným tempom. Užitočné je uvažovať najmä s *prácu-násobiacim* technologickým pokrokom. V tomto prípade zlepšenie technológie o 1% vedie k tomu, že produkt sa zvýši tak, akoby v ekonomike pracovalo o 1% viac pracovníkov. Inými slovami, aj keď je počet pracovníkov konštantný, množstvo *efektívnych pracovných síl* vzrastie o 1%.

Takáto modifikácia modelu vedie k tomu, že stály stav definovaný ako situácia, kedy je kapitálová vybavenosť konštantná prestáva existovať. Existuje však stály stav, kde je konštantná kapitálová zásoba na jednotku *efektívnej pracovnej sily* – t.j. *efektívna kapitálová vybavenosť*. Po dosiahnutí takéhoto stále stavu produkt na jedného pracovníka rastie tempom rovným miere technologického pokroku.

Pokiaľ ide o mikroekonomické základy Solow-Swan modelu, tie boli z veľkej časti vytvorené až Ramsey-Cass-Koopmans[3] modelom, dôležité je však spomenúť implicitný predpoklad plnej zamestnanosti v Solow-Swan modeli. Solow prebral tento predpoklad prekvapivo spoločný pre keynesovské aj neoklasické modely rastu práve z keynesovského Harrodovho modelu. Vo svojom článku ho v súlade s neoklasickou tradíciou obhajuje implicitným predpokladom trhu práce, na ktorom dokonale pružná mzda vedie k plnej zamestnanosti v každom období.

1.2 Formálny zápis modelu

Vzhľadom na to, že našim zámerom je aplikovať Solow-Swan model na ekonomiku Slovenska, neuvažujeme s dlhodobým rastom počtu pracovníkov (pri každej kalibrácii budeme predpokladať $n = 0$, kde n je tempo rastu počtu pracovníkov). Pre všeobecnosť však prezentujeme Solow-Swan s týmto prvkom.

---

[2] Všetky modely, s ktorými pracujeme, predpokladajú plnú zamestnanosť. Z tohto dôvodu budeme používať pojmy „par capita“ a „na pracovníka“ ako synonymá.

[3] Pôvodné riešenie Franka Ramseyho (Ramsey, 1928) však predchádzalo Solow-Swan model o takmer 30 rokov. Ramseyho prístup bol znovu objavený Davidom Cassom (Cass, 1965) a Tjallingom C. Koopmansom (Koopmans 1965) deväť rokov po článku Roberta Solowa.

Pre jednoduchosť model predstavujeme v spojitom čase, jednotlivé obdobia sú teda nekonečne blízko pri sebe.

Predpokladajme produkčnú funkciu v nasledovnom tvare:

$$Y = F(K, TL)$$

Y – produkt; K – kapitál; T – koeficient technológie; L – počet pracovníkov

Celkový produkt je funkciou množstva kapitálu K a množstva pracovníkov L vynásobeného koeficientom technológie T – t.j. množstva efektívnych pracovných síl. Konkretizujme už teraz túto funkciou ako Cobb-Douglasovú produkčnú funkciu[4]. Označme tempo práce-násobiaceho technologického pokroku g, platí teda $\dot{T}/T = g$ resp. $T = T(0)e^{gt}$ [5]. Ak normalizujme $T(0) = 1$, môžeme zapísať $T = e^{gt}$.

$$Y = AK^{\alpha}(TL)^{1-\alpha} = AK^{\alpha}\left(e^{gt}L\right)^{1-\alpha} \tag{1.1}$$

α – koeficient elasticity nákladov; A – úrovňová konštanta, g – tempo technologického pokroku; t- čas

Všimnime si relatívne triviálnu vec: Cobb-Douglasová produkčná funkcia umožňuje existenciu rôzneho pomer kapitálu a finálneho produktu Y/K (a tiež rôzneho pomeru práce a kapitálu L/K). Toto pozorovanie sa stane dôležitým, keď budeme konfrontovať Solow-Swan model s Kaldorovým modelom.

---

[4] Východiská Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie uvádzajú napr. (Čaplánová – Lisý – Petričová, 1999, s. 112-113):

- *Objem výroby je funkciou oboch výrobných faktorov, práce a kapitálu, medzi ktorými existuje možnosť neobmedzenej vzájomnej substitúcie*
- *Hraničný produkt rastúceho výrobného faktora sa znižuje, ak sa objem – množstvo druhého faktora nemení. Hraničný produkt oboch výrobných faktorov je však vždy pozitívny, teda zväčšuje objem výroby.*
- *Medzi dosiahnutým objem výroby a objemom výrobných faktorov (veľkosťou výrobných nákladov) existuje lineárna závislosť. Objem výroby sa zväčšuje proporcionálne s rovnakým rastom oboch výrobných faktorov. To znamená, že výrobný proces prebieha pri konštantných výnosoch, resp. nákladoch.*

Cobb-Douglasová produkčná funkcia je typickou neoklasickou produkčnou funkciou spĺňajúcou podmienky:

$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ pre každé $\lambda > 0$, $F(0, L) = F(K, 0) = 0$, $\frac{dF}{dK} > 0$, $\frac{dF}{dL} > 0$, $\frac{dF}{dK^2} < 0$ $\frac{dF}{dK^2} < 0$

Cobb-Douglasová produkčná funkcia spĺňa taktiež tzv. Inadové podmienky:

$$\lim_{K \to \infty} \frac{dF}{dK} = \lim_{L \to \infty} \frac{dF}{dL} = 0 \; ; \; \lim_{K \to 0} \frac{dF}{dK} = \lim_{L \to 0} \frac{dF}{dL} = \infty$$

[5] V súlade so štandardným značením, „bodka“ nad veličinou vyznačuje zmenu danej veličiny v čase: $\dot{K} \equiv dK/dt$

Celkový produkt sa rozdelí na spotrebu a úspory, pričom sklon k úsporám je konštantný

$$Y = C + S$$
$$S = sY$$
$$C = (1-s)Y$$

C – spotreba; S – úspory; s – sklon k úsporám

Platí, že investície sa rovnajú úsporám a teda prírastok kapitálovej zásoby v čase sa rovná úsporám zníženým o opotrebenie kapitálu:

$$\dot{K} = I - \delta K = sF(K, AL) - \delta K \tag{1.2}$$

δ – miera opotrebenia

V diskrétnom čase $\dot{K}$ nahradíme ΔK (pričom $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$) rovnica akumulácie bude teda vyzerať $\Delta K = sF(K, AL) - \delta K$ resp.:

$$K_{t+1} = K_t + sF(K, AL) - \delta K = (1-\delta) K_t + sF(K, AL)$$

Ako sme uviedli vyššie, ekonomika bude dosahovať stály stav v zmysle konštantnej kapitálovej zásoby na jednotku efektívnych pracovných síl. Je teda užitočné zadefinovať veličinu *efektívna kapitálová vybavenosť*, ktorú označíme κ, pričom platí

$$\kappa = \frac{K}{TL} = \frac{K}{e^{gt} L} \tag{1.3}$$

κ – efektívna kapitalová vybavenosť

Keďže produkčná funkcia je homogénna prvého stupňa (t.j. platí $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ pre každé $\lambda > 0$ - ak napr. zdvojnásobíme všetky vstupy, výstup vzrastie presne dvakrát), môžeme takisto zapísať funkciu pre produkt na jednotku efektívnych pracovných síl.

$$\frac{Y}{TL} = \frac{F(K, TL)}{TL} = F\left(\frac{K}{TL}, 1\right) = f(\kappa)$$

Vidíme teda, že produkt na jednotku efektívnych pracovných síl je funkciou efektívnej kapitálovej vybavenosti. Ako sme uviedli vyššie, stály stav nastáva v bode, kde je efektívna kapitálová vybavenosť konštantná. Aby sme vyšetrili, ako sa správa κ v čase, derivujme K/TL podľa času a dosaďme do získaného výrazu rovnicu akumulácie (1.2). Pripomíname predpoklad, že tempo rastu počtu pracovníkov je konštantné $\dot{L}/L = n$ resp. $L = L(0)e^{nt}$; po normalizácii $L(0) = 1$ platí $L = e^{nt}$.

$$\frac{d\left(\frac{K}{LA}\right)}{dt}=\frac{\frac{dK}{dt}LA-K\frac{d(LA)}{dt}}{(LA)^2}=\frac{\frac{dK}{dt}LA-KA\frac{dL}{dt}-KL\frac{dA}{dt}}{(LA)^2}=\frac{\frac{dK}{dt}}{LA}-n\kappa-g\kappa=$$

$$=\frac{sF(K,LA)-\delta K}{LA}-n\kappa-g\kappa=sf(\kappa)-(\delta+n+g)\kappa$$

n – tempo rastu počtu pracovníkov

Interpretácia rovnice akumulácie kapitálu na jednotku efektívnych pracovných síl

$$\dot{\kappa}=sf(\kappa)-(\delta+n+g)\kappa \tag{1.4}$$

je nasledovná: efektívna kapitálová vybavenosť sa zvýši o tú časť produktu na jednotku efektívnej práce, ktorá sa usporí, t.j. o *efektívne úspory* $sf(\kappa)$. Časť kapitálu sa však opotrebuje, preto κ klesne o *efektívne opotrebenie* $\delta\kappa$. Zároveň však vzrastie počet pracovných síl tempom *n*. Vzrastie aj úroveň technológie, a to mierou *g*. Počet efektívnych pracovných síl teda vzrastie tempom $(n+g)$. Ak by aj bolo množstvo kapitálu v ekonomike konštantné, efektívna kapitálov vybavenosť poklesne o $(n+g)\kappa$, lebo počet efektívnych pracovných síl vzrástol.

Ak má byť teda efektívna kapitálová vybavenosť konštantná, t.j. $\dot{\kappa}^*=0$, musí platiť:

$$\dot{\kappa}^*=0 \Leftrightarrow sf(\kappa^*)-(\delta+n+g)\kappa^*=0 \Leftrightarrow sf(\kappa^*)=(\delta+n+g)\kappa^*$$

κ* - efektívna kapitálová vybavenosť v stálom stave

V príde Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie získava rovnosť $f(\kappa^*)=(\delta+n+g)\kappa^*$ nasledujúcu podobu:

$$sA(\kappa^*)^{\alpha}=(\delta+n+g)\kappa^*$$

$$\kappa^*=\left(\frac{sA}{\delta+n+g}\right)^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \tag{1.5}$$

Graficky problém stáleho stavu ilustruje obrázok 1.

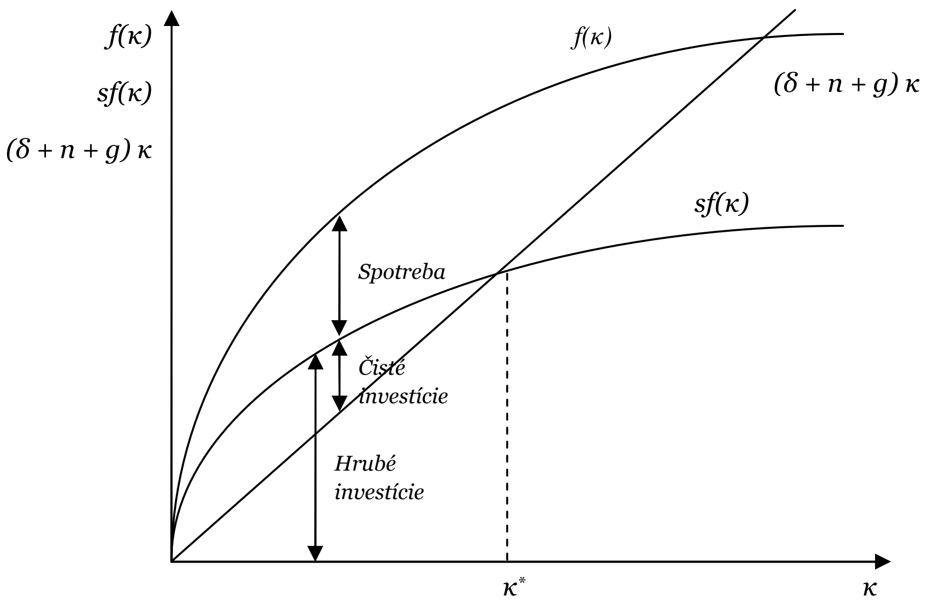
V prípade, že efektívna kapitálová vybavenosť dosiahne vyššie definovanú úroveň, dosiahla ekonomika stály stav a kapitálová vybavenosť sa v čase nebude meniť. Uvedená podmienka zároveň predstavuje tzv. zlaté pravidlo akumulácie kapitálu v Solow-Swan modeli. V prípade, že je efektívna kapitálová vybavenosť nižšia ako je jej stála hodnota, teda $\kappa<\kappa^*$, platí (kvôli konkávnosti produkčnej funkcie – t.j. kvôli klesajúcemu hraničnému produktu kapitálu), že $\dot{\kappa}=sf(\kappa)-(\delta+n+g)\kappa>0$. Keďže efektívne úspory prevyšujú efektívne opotrebenie, miera efektívnej kapitálovej rastie.

Analogický platí, že pre $\kappa > \kappa^*$ miera efektívnej kapitálovej vybavenosti klesá. Ekonomika tak konverguje k stálemu stavu, kedy $\kappa = \kappa^*$. Keďže κ je konštantné, kapitálová zásoba rastie rovnakým tempom ako množstvo efektívnych pracovných síl, t.j. tempom $(n+g)$. Keďže počet efektívnych pracovných síl ako aj kapitálová zásoba rastú rovnakým tempom; z homogenity prvého stupňa produkčnej funkcie vyplýva, že aj celkový produkt rastie týmto tempom. Keďže produkt rastie tempom $(n+g)$ a počet pracovníkov rastie tempom *g*, produkt *per capita* rastie tempom *g*, t.j. tempom technologického pokroku. Rovnakým tempom rastie aj spotreba (podiel ktorej na produkte je konštantný).

Dôležitým a zároveň veľmi prekvapivým záverom je, že v dlhom období tempo rastu ekonomiky *nezáleží* od sklonu k úsporám.

O b r á z o k 1

Stály stav v Solow-Swan modeli



Zdroj: Spracované podľa Barro – Sala-i-Martin, 1995

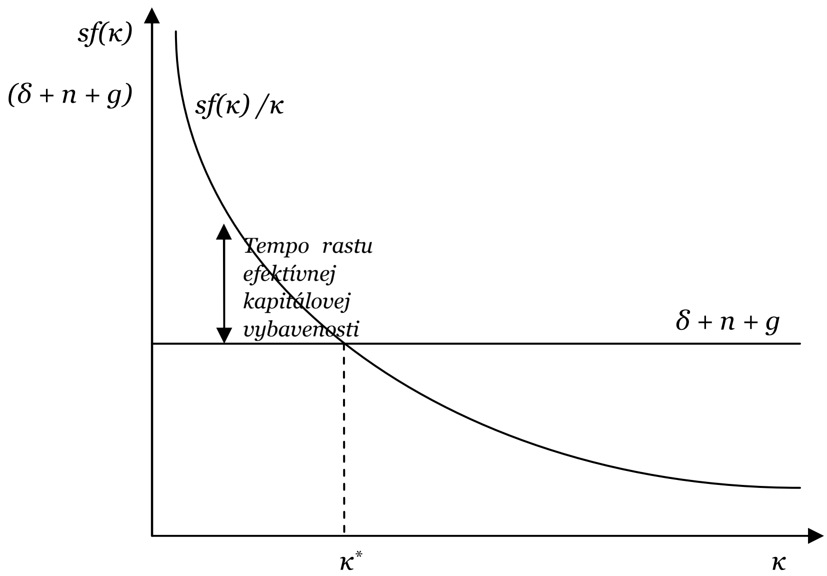
Z rovnice akumulácie odvodenej v (1.4) môžeme odvodiť vzťah pre tempo rastu kapitálu:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{sf(\kappa)}{\kappa} - (\delta + n + g)$$

Už z hore uvedeného vidíme, že v prípade, že je efektívna kapitálová vybavenosť nižšia a blíži sa k stálej hodnote, tempo jej rastu klesá. V prípade, že je jej hodnota vyššia ako stála hodnota, tempo jej rastu je záporne a v absolútnej hodnote klesá (približuje sa nule). Tento problém graficky vyjadruje obrázok 2.

O b r á z o k 2

Tempo rastu efektívnej kapitálovej vybavenosti v Solow-Swan modeli



Zdroj: Spracované podľa Barro – Sala-i-Martin, 1995

Záver, že ekonomika bez ohľadu na konkrétne hodnoty parametrov konverguje k stálemu stavu je veľmi dôležitý. Tento záver je výsledkom možnosti substitúcie práce a kapitálu v Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii (a v neoklasických produkčných funkciách vo všeobecnosti). Ak by sme nahradili Cobb-Douglasovú produkčnú funkciu Leontiefovskou produkčnou funkciou $Y = \min(AK, BL)$, kde A a B sú parametre ($A > 0$; $B > 0$), Solow-Swan model by sa zmenil na Harrod-Domar model ekonomického rastu v ktorom by ekonomika konvergovala (v prípade absencie technologického pokroku) k stálemu stavu iba za veľmi špecifickej kombinácie parametrov tempa rastu počtu pracovníkov, sklonu k úsporám a sklonu k investíciám. Práve z Leontiefovskej produkčnej funkcie vyplýva Harrodovský rozpor medzi prirodzenou a zaručenou mierou rastu.[6]

[6] Okrem pôvodných prác Harrod, 1939; Harrod, 1942 a Domar, 1964 pozri pre spôsob, akým Harrod a Domar využívajú princíp multiplikátora a akcelerátora prílohu 1, ktorá sleduje publikáciu Čaplánová – Petričová – Lisý, 1999 a Lisý 2005. Pre vysvetlenie Harrod-Domar modelu v kontexte Solow-Swan modelu (nahradením Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie Leontiefovskou produkčnou funkciou) pozri pôvodný článok Solowa (Solow, 1956) ale aj Barro – Sala-i-Martin 1995. Zdôrazňujeme, že

Solow-Swan model má dôležité empirické implikácie: Ak ekonomiky bez ohľadu na počiatočnú úroveň kapitálovej vybavenosti konvergujú k stálemu stavu, na prvý pohľad sa zdá, že by sme mohli pozorovať konvergenciu v ekonomickej výkonnosti jednotlivých krajín. Z globálneho pohľadu však nič také nepozorujeme a to z jednoduchého dôvodu – hodnota efektívnej kapitálovej vybavenosti v stálom stave okrem iného závisí (na základe zlatého pravidla (1.5)) od úrovňovej konštanty A (a teda od úrovni technológie, nie len jej tempa rastu) a miery úspor s. Ak sa teda zameriame na homogénnu skupinu krajín, medzi ktorými predpokladáme podobné hodnoty parametrov (napr. štáty USA, provincie Japonska alebo štáty OECD[7]), mali by sme objaviť tendencie ku konvergencii, čo sa aj potvrdzuje. Ešte lepšie empirické výsledky dosahuje Solow-Swan model po rozšírení o ľudský kapitál napr. produkčnou funkciou $Y = AK^{\alpha}H^{\beta}(TL)^{1-\alpha-\beta}$, kde H je ľudský kapitál a β je parameter pričom $\alpha+\beta<1$.

Zdrojom rozdielnej výkonnosti jednotlivých krajín svetovej ekonomiky sú podľa Solow-Swan modelu rozdielne sklony k úsporám do fyzického (a po rozšírení aj ľudského) kapitálu. [8]

Solow-Swan model zanechal mnoho otvorených otázok aj napriek svojej schopnosti vysvetliť rozdiely v HDP per capita v rámci svetovej ekonomiky. Prvou je silný predpoklad konštantného sklonu k úsporám. Tento problém vyriešil práve Ramsey-Cass-Koopmans model. Druhou je to, že Solow-Swan model *ekonomického rastu* vlastne nedokáže vysvetliť prečo ekonomiky rastú, keďže zdrojom rastu je *exogénny* technologický pokrok. Tieto problémy riešia endogénne teórie rastu.

1.3 Modifikácie modelu

Aby sme mohli Solow-Swan model úspešne aplikovať na ekonomiku SR, vykonáme dve modifikácie.

1.3.1 Otvorenosť ekonomiky

Solow-Swan model je modelom uzatvorenej ekonomiky. Skutočná ekonomika však uzatvorená nie je a z tohto dôvodu národohospodárska identita neplatí v podobe, v akej ju predpokladá Solow-Swan model, t.j. $Y = C + I$. Namiesto toho je potrebné zapísať $Y = C + I + NX$, kde NX označuje čistý export. „Otvorenie“ ekonomiky so

---

Harrod a Domar neprezentujú model založený na produkčnej funkcii, nahradenie Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie Leontiefovskou funkciou je iba spôsob, ako zasadiť Harrod-Domar model do Solow-Swanovského rámca.

Leontiefovská produkčná funkcia $Y = \min(AK, BL)$ sa totiž vyznačuje tým, že zachováva keynesovské predpoklady konštantného pomeru $K/Y = 1/A$ a $L/K = A/B$.

[7] Pozri Barro – Sala-i-Martin, 1995.

[8] Bližšie Mankiw – Romer – Weil, 1992.

sebou prináša známy efekt nerovnosti úspor a investícií v domácej ekonomike, keďže časť investícií môže byť financovaná zahraničnými zdrojmi, resp. časť domácich úspor môže byť použitá na investovanie v zahraničí. Keďže domáce úspory sú rozdielom produktu a spotreby $S = Y - C$, po úpravách identity $Y = C + I + NX$ získavame rovnosť: [9]

$$I = S - NX$$

NX – čistý export

V prípade, že je hodnota čistého exportu záporná, domáce investície prevyšujú domáce úspory. Inak povedané, v prípade, že je bežný účet platobnej bilancie deficitný, kapitálový účet musí byť prebytkový. Otvorenosť ekonomiky vedie k nutnosti modifikovať rovnicu akumulácie (1.2) nasledovným spôsobom:

$$\dot{K} = sF(K, AL) - NX - \delta K$$

Hodnotu čistého exportu v jednotlivých rokoch budeme považovať za exogénne danú.

1.3.2 Spotreba verejného sektora

Aby sme získali ešte presnejší obraz o vývoji ekonomiky, zavedieme do Solow-Swan modelu verejný sektor. Bude predpokladať, že podiel verejnej spotreby na celkovom produkte je daný exogénne a je v každom roku odlišný. Definujme τ ako podiel verejnej spotreby na produkte:

$$\tau = \frac{G}{Y}$$

τ – podiel verejnej spotreby na produkte; G – spotreba verejného sektora

Ak by sme uvažovali s vyrovnaným rozpočtom verejného sektora, τ by bolo možno chápať ako podiel daní na dôchodku, teda ako mieru zdanenia.

Toto rozšírenie zmení pôvodný dvojsektorový Solow-Swan model na štvorsektorový model s verejnou spotrebou a zahraničím a národohospodárska identita bude mať podobu $Y = C + I + G + NX$.

Zmeníme takisto predpoklad konštantného sklonu k spotrebe z celkového produktu ($C = (1-s)Y$) a namiesto toho budeme predpokladať, že spotreba je konštantnou časťou disponibilného dôchodku:

$$C = (1-s)(Y-G) = (1-s)\left[(1-\tau)Y\right]$$

Pre úspory platí:

[9] O vzťahoch základných makroekonomických agregátov v otvorenej ekonomiky pozri Hontyová, 2005 alebo Muchová, 2005.

$$S = s(1-\tau)Y \quad (1.6)$$

Toto rozšírenie vedie k nutnosti ďalej modifikovať rovnicu akumulácie:

$$\dot{K} = I - \delta K = s(1-\tau)F(K, AL) - NX - \delta K .$$

1.4 Kalibrácia

Aby sme mohli kalibrovať Solow-Swan model, potrebujeme údaje o produkte podľa zložiek výdavkov, o kapitálovej zásobe a trhu práce.

1.4.1 Produkt podľa zložiek výdavkov – Y, C, I, G, NX

Na základe týchto údajov môžeme vypočítať priemerný sklon k úsporám $s = 1 - [C/(Y-G)]$ a taktiež podiely verejnej spotreby na produkte $\tau = G/Y$ pre každé obdobie.

Priemerná hodnota sklonu k úsporám v období rokov 1995-2008 je *s = 0,317*.

Tabuľka 1

Hlavné makroekonomické agregáty

	Y	C	I	G	NX	S	τ
1995	26 194	13 357	5 775	6 495	567	0,346	0,220
1998	30 722	16 903	6 774	10 015	-2 969	0,294	0,220
2001	32 237	18 247	6 881	9 425	-2 316	0,280	0,213
2004	37 105	20 430	7 181	10 068	-574	0,317	0,194
2008	50 418	26 178	8 155	14 531	1 553	0,381	0,162

Údaje v mil. EUR

Zdroj: Štatistický úrad SR; vlastné výpočty

1.4.2 Údaje o kapitálovej zásobe

Vzhľadom na to, že tieto údaje nie sú vo všeobecnosti dostupné v takej podobe, aby platilo, že kapitálová zásoba v čase *t* predstavuje kapitálovú zásobu v čase *t-1* zvýšenú o investície a zníženú o opotrebenie, vypočítame veľkosť kapitálovej zásoby pre jednotlivé obdobia pomocou metódy permanentnej inventarizácie. Aby sme mohli túto metódu použiť, potrebujeme okrem údajov o investíciách v jednotlivých rokoch aj údaje o opotrebení a odhad kapitálovej zásoby v jednom roku sledovaného obdobia. Za týmto účelom používame odhad Štatistického úradu SR (ŠÚ SR), ktorý bol použitý v dokumente Ministerstva financií SR *An Econometric Model of Slovak Republic*, t.j. 4 535 020 mil. Sk na konci roku 1998 v bežných cenách (Livermore, 2004, s. 17). Po prepočte na stále ceny pomocou deflátora investícií (ktorý pre rok 1998 dosahuje hodnotu 88,67) a prerátaní na EUR získavame hodnotu kapitálovej zásoby vo výške 169 713 mil. EUR. Aby sme zachovali logiku Solow-Swan modelu, považujme odhad na *konci* roka 1998 za odhad na *začiatku* roka 1999. V ďalšom texte budeme odkazovať na odhad za rok 1999.

Kapitálová zásoba pre ostatné obdobia je vypočítaná pomocou metódy permanentnej inventarizácie, t.j. na základe logiky:

$$K_{t+1} = K_t + I_{t+1} - SFK_{t+1}$$

$$K_{t-1} = K_t - I_t + SFK_t$$

SFK – spotreba fixného kapitálu - amortizácia

Vypočítané údaje pre vybrané roky ilustruje tabuľka 2.

Vypočítame taktiež mieru opotrebenia δ pre jednotlivé roky. V modeli budeme používať priemernú hodnotu, ktorá dosahuje δ = 3,91% avšak už dopredu upozorňujeme, že toto zjednodušenie v duchu Solow-Swan modelu sa stane zdrojom chýb. V skutočnosti totiž nie je miera opotrebenia konštantná a ani neosciluje okolo konštantnej hodnoty, ale má rastúci trend.

T a b u ľ k a 2

Kapitálová zásoba

	I	SFK	K	δ=SFK/K	Y/K
1995	6 495	5 344	157 813	3,39%	6,02
1998	10 015	6 237	165 934	3,76%	5,40
2001	9 425	6 641	173 329	3,83%	5,38
2004	10 068	7 310	180 137	4,06%	4,85
2008	14 531	8 268	197 157	4,19%	3,91

Údaje v mil. EUR

Zdroj: Štatistický úrad SR; Eurostat; vlastné výpočty

Radi by sme zdôraznili, že je možné, že odhad kapitálovej zásoby Štatistického úradu SR pre rok 1999 je nadhodnotený. Pomer kapitálovej zásoby k produktu (K/HDP) sa za skúmané obdobie pohybuje od 6,02 v roku 1995 do 3,91 v roku 2008, čo výrazne prevyšuje hodnoty v ostatných európskych krajinách (2,6 až 3,9; odhadovaná hodnota za porovnateľné Maďarsko je K/HDP = 2,7[10]).

[10] Livermore, 2004, s. 17

Alternatívny spôsob odhadu kapitálovej zásoby

Kapitálovú zásobu je možné odhadnúť aj alternatívnym spôsobom nezaloženým na zbere štatistických údajov, ale na makroekonomickej teórii. Táto alternatívna metóda však vyžaduje niekoľko veľmi silných predpokladov: (1) konštantné tempo rastu HDP, (2) konštantný sklon k úsporám a (3) konštantnú mieru opotrebenia počas dostatočne dlhého obdobia, ktoré predchádzalo obdobiu, ktoré je predmetom výskumu (v našom prípade teda do roku 1995) a predpoklad, že všetky tieto hodnoty sú známe.

Vychádzajme z rovnice známej rovnice akumulácie (1.2) prepísanej do diskrétneho času:

$$K_{t+1} = K_t + sY_t - \delta K_t$$
$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + sY_t$$

Parameter *s* teraz opäť na chvíľu predstavuje konštantný sklon k úsporám z produktu (a nie z disponibilného dôchodku), teda $s = S/Y = 1-(C/Y)$. Predeľme oba strany rovnice produktom v čase *t*.

$$\frac{K_{t+1}}{Y_t} = (1-\delta)\frac{K_t}{Y_t} + s$$

Rozšírme zlomok na pravej strane:

$$\frac{K_{t+1}}{Y_t}\frac{Y_{t+1}}{Y_{t+1}} = (1-\delta)\frac{K_t}{Y_t} + s$$

Využime teraz predpoklad, že tempo rastu produktu je konštantné, teda $1+g_Y = Y_{t+1}/Y_t$ aby sme získali:

$$\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}}\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = (1-\delta)\frac{K_t}{Y_t} + s$$

$$\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}}(1+g_Y) = (1-\delta)\frac{K_t}{Y_t} + s$$

$$\frac{K_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{1-\delta}{1+g_Y}\times\frac{K_t}{Y_t} + \frac{s}{1+g_Y}$$

Je možné ukázať, že pomer kapitálovej zásoby a produktu bude za hore uvedených predpokladov konvergovať ku konštantnej hodnote $(K/Y)*$. Môžeme teda zapísať:

$$\left(\frac{K}{Y}\right)* = \frac{1-\delta}{1+g_Y}\times\left(\frac{K}{Y}\right)* + \frac{s}{1+g_Y}$$

$$\left(1-\frac{1-\delta}{1+g_Y}\right)\left(\frac{K}{Y}\right)^* = \frac{s}{1+g_Y}$$

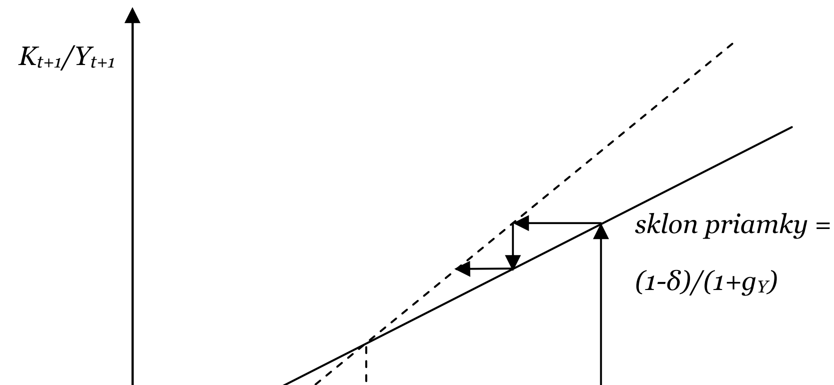
$$\left(\frac{g_Y+\delta}{1+g_Y}\right)\left(\frac{K}{Y}\right)^* = \frac{s}{1+g_Y}$$

$$\left(\frac{K}{Y}\right)^* = \frac{s}{g_Y+\delta}$$

Tento jav ilustruje obrázok 3 (keďže hodnota zlomku $(1-\delta)/(1+g)$ je vždy menšia ako jedna a väčšia ako nula, sklon plnej priamky bude vždy menší ako jedna, ale bude kladný). Ako je vidieť, bez ohľadu na počiatočnú hodnotu pomeru (K/Y), systém konverguje ku stálej hodnote $(K/Y)^*$.

O b r á z o k 3

Konvergencia pomeru kapitálovej zásoby a produktu k stélej hodnote



Zdroj: Vlastné spracovanie

V prípade, ak by sme ako hodnoty g_Y a s použili priemerné hodnoty za prvých päť rokov sledovaného obdobia (t.j. g_Y = 4,10% a s = 0,240) a mieru opotrebenia zvolili ad hoc δ = 4% (v makroekonómii zaužívaná hodnota), pomer kapitálu a produktu by bol:

$$\left(\frac{K}{Y}\right)^* = \frac{s}{g_Y + \delta} = \frac{0,24}{0,041+0,04} = 2,995$$

V tabuľke 2 si všimnime, že v prípade, ak odhadujeme kapitálovú zásobu metódou permanentnej inventarizácie, dospievame v roku 1995 k viac než dvakrát vyššej hodnote pomeru kapitálu a produktu. Inými slovami, na základe alternatívneho výpočtu sme v porovnaní s metódou permanentnej inventarizácie dospeli takmer k dvakrát nižšej hodnote kapitálovej zásoby v roku 1995. Samozrejme, to by platilo iba za predpokladu, že sklon k úsporám dosahoval hodnotu 0,240 a priemerne tempo rastu sa pohybovalo okolo 4,10% dostatočne dlho.

1.4.3 Údaje o trhu práce

Pre kalibráciu Solow-Swan modelu je prirodzene potrebné kvantifikovať veličinu *L*, ktorá v modeli predstavuje počet pracovníkov. Pri simulácií však môžeme získať väčšiu presnosť, ak budeme *L* chápať ako počet odpracovaných hodín v danom období. Z tohto dôvodu kvantifikujeme *L* týmto spôsobom.

V Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii je potrebné kvantifikovať parameter α. Pre určenie hodnoty tohto parametru je užitočné použiť predpoklad, že ceny výrobných sú rovné ich hraničným produktom.

$$w = \frac{dF}{dL} = (1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} e^{(1-\alpha)gt} \Leftrightarrow \frac{Lw}{Y} = \frac{(1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} e^{(1-\alpha)gt}L}{AK^{\alpha}L^{(1-\alpha)}e^{(1-\alpha)gt}} = (1-\alpha)$$

$$r = \frac{dF}{dK} = \alpha A\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-\alpha)} e^{(1-\alpha)gt} \Leftrightarrow \frac{Kr}{Y} = \frac{\alpha A\left(\frac{L}{K}\right)^{(1-\alpha)} e^{(1-\alpha)gt}K}{AK^{\alpha}L^{(1-\alpha)}e^{(1-\alpha)gt}} = \alpha$$

w – mzda; r – úroková miera

Ako vidíme, tento predpoklad vedie k záveru, že podiel miezd na dôchodku je rovný $(1-\alpha)$ a podiel dôchodkov z kapitálu na dôchodku je rovný α. Parameter α je teda možné kvantifikovať priamo na základe národných účtov ako podiel miezd na HDP. Nebolo by však správne zaradiť všetky príjmy okrem miezd medzi dôchodky z kapitálu. Hlavne v prípade samostatne zárobkovo činných osôb (SZČO) je potrebné rozdeliť ich príjem na príjem z kapitálu a príjem z práce – teda mzdu. Z tohto dôvodu kvantifikujeme člen $(1-\alpha)$ ako tzv. *upravený podiel miezd AWS* (adjusted wage share), ktorý vypočítame nasledovne:

$$AWS = \frac{OZ}{HDP} \times \frac{PR}{ZAM}$$

AWS – upravené podiel miezd; OZ – odmeny zamestnancov; PR – počet pracovníkov; ZAM – počet zamestnancov

Platí, že počet pracovníkov je rovný počtu zamestnancov plus počet samostatne zárobkovo činných osôb.

Ako $(1-\alpha)$ použijeme priemerné hodnotu AWS za sledované obdobie, teda $(1-\alpha)=0,435$ čo implikuje $\alpha=0,565$.

T a b u ľ k a 3

Údaje o trhu práce

	L	OZ	HDP	PRAC	ZAM	AWS
1995	3 957	7 716	19 310	2 147	2 007	0,427
1998	3 834	11 121	26 154	2 199	2 046	0,457
2001	3 645	13 451	33 855	2 124	1 943	0,434
2004	3 562	16 640	45 128	2 170	1 904	0,420
2008	3 958	24 909	67 221	2 434	2 094	0,431

L - počet odpracovaných hodín v mil.; OZ, HDP v mil. EUR b.c.; PRAC, ZAM v tis.

Zdroj: Štatistický úrad SR; vlastné výpočty

1.4.4 Odhad Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie

Parametrami, ktoré sme v Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii $Y=AK^{\alpha}\left(e^{gt}L\right)^{1-\alpha}$ ešte nekvantifikovali, sú úrovňová konštanta *A* a tempo technologického pokroku *g*. Všimnime si, že pre jednotlivé roky poznáme hodnoty *Y, K* a *L*, takisto sme odhadli hodnotu parametra *α* = 0,565. Upravme produkčnú funkciu tak, že všetky známe členy umiestnime na pravú ľavú a všetky neznáme na stranu pravú:

$$\frac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}=Ae^{g(1-\alpha)t}$$

Produkčnú funkciu teraz zlogaritmujme:

$$\ln\frac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}=\ln A+\left[g\left(1-\alpha\right)\right]t$$

Keďže pre každé *t* vieme vypočítať hodnotu člena $\ln\left(Y/K^{\alpha}L^{1-\alpha}\right)$, môžeme vykonať regresnú analýzu vo forme:

$$q_t = \gamma_0 + \gamma_1 t$$

$$q_t \equiv \frac{Y_t}{K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}$$

q – závislá premenná; t – čas; γ_0 – úrovňová konštanta; γ_1 – sklon regresnej priamky

Odhad hodnoty parametru γ_1 použijeme ako hodnotu člena $g(1-\alpha)$, odhad úrovňovej konštanty γ_1 ako hodnotu $\ln A$.

$$\ln A = \beta_0 \Leftrightarrow A = e^{\beta_0}$$

$$g(1-\alpha) = \beta_1 \Leftrightarrow g = \frac{\beta_1}{1-\alpha}$$

Odhadnuté hodnoty γ_0 a γ_1 sú γ_0 = -0,1927 a γ_1 = -0,1927, čo implikuje A = 0,825 a g = 8,75%[11].

Cobb-Douglasová produkčná funkcia má teda podobu $Y = 0{,}825K^{0{,}565}\left(e^{0{,}0875t}L\right)^{0{,}435}$.

To, ako dobre opisuje nami navrhnutá produkčná funkcia reálny vývoj HDP, ilustruje graf 1. Upozorňujeme, že hodnoty na osi y v grafe 1 (tak ako aj v mnohých ostatných grafoch v tejto štúdii) začínajú od 20 000 – odchýlky modelovaných a skutočných sú teda menšie, ako sa na prvý pohľad zdajú.

Je užitočné všimnúť si, že Cobb-Douglasová produkčná funkcia najprv podhodnocuje skutočné HDP, neskôr nadhodnocuje a neskôr podhodnocuje. Je tomu tak preto, že skutočné tempo technologického pokroku (ktoré by sme mohli identifikovať napr. pomocou metódy rastového účtovníctva – pozri napr. Lábaj 2009[12]) bolo najprv vyššie, ako je nami odhadovaných 8,75%, neskôr nižšie a nakoniec opäť vyššie.

Inými slovami, model obsahuje autokoreláciu reziduí. Bohužiaľ, akýkoľvek pokus, riešiť tento problém, ktorý by nám umožnil získať kvalitnejšie odhady, by znamenal

---

[11] Štandardná chyba parametru γ_1 je na úrovní 0,0019.

[12] Upozorňujeme na dôležitý rozdiel medzi tempom prácu-násobiaceho technologického pokroku, s ktorým pracujeme v našom modeli a tempom rastu celkovej produktivity faktorov (TFP), s ktorým pracuje rastové účtovníctvo.

V našom modeli predpokladáme produkčnú funkciu $Y(t) = AK(t)^{\alpha}\left[T(t)L(t)\right]^{1-\alpha}$ a tempo prácu-násobiaceho technologického pokroku g predstavuje tempo rastu člena *T(t)*. Člen *A* je konštantnou.

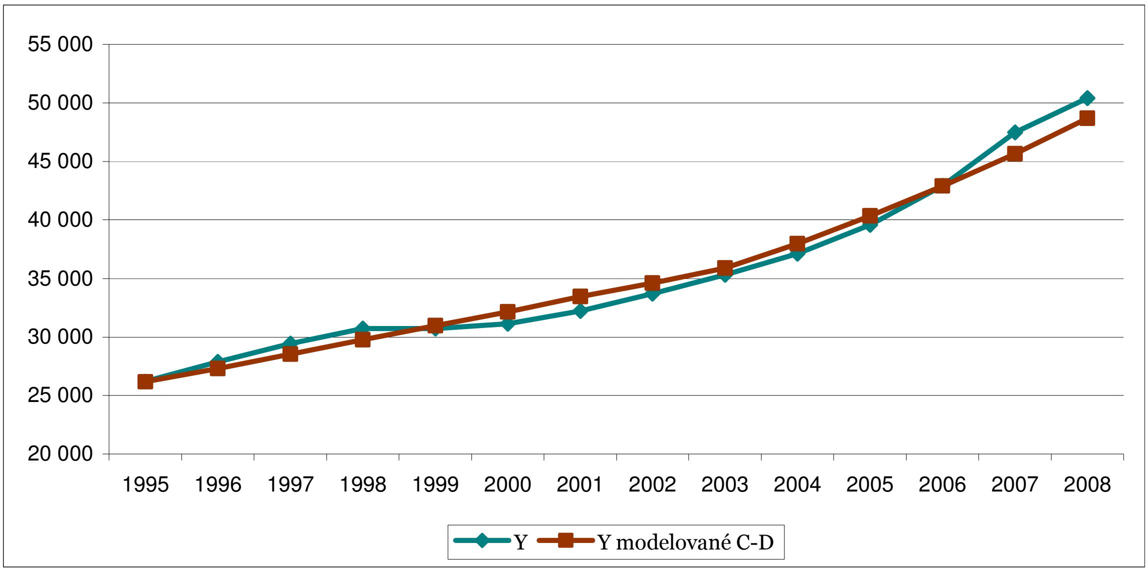
Rastové účtovníctvo predpokladá produkčnú funkciu $Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$ a tempo rastu TFP – označme ho r – predstavuje tempo rastu člena *A(t)*, ktorý *nie je konštantou*.

Vzťah medzi dvoma tempami rastu je: $g = \frac{r}{1-\alpha}$

nutnosť opustiť predpoklad Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie. Samozrejme, Solow-Swan model je možne konštruovať aj s inou produkčnou funkciou, v našej štúdii sa však sústredíme iba na Cobb-Douglasovú produkčnú funkciu.

G r a f 1

Cobb-Douglasová produkčná funkcia



Zdroj: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

Ako mieru presnosti odhadu budeme v ďalšom texte používať normalizovanú odmocnenú strednú štvorcovú chybu NRMSE (normalised root mean squared error). Logika NRMSE je nasledovná:

Vypočítame strednú štvorcovú chybu MSE (mean squared error):

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2$$

N – počet pozorovaní

MSE následne odmocníme aby sme získali odmocnenú strednú štvorcovú chybu RMSE (root mean squared error):

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

Prirodzene ak modelujeme veličiny, ktoré sa menia viac, nami vypočítaná RMSE bude mať tiež tendenciu byť väčšia. V prípade veličín, ktoré nadobúdajú vyššie hodnoty, bude RMSE taktiež vyššia. Z tohto dôvodu je užitočnú RMSE *normalizovať* tak, že ju predelíme rozdielom medzi najvyššou a najnižšou pozorovanou hodnotou.

$$NRMSE = \frac{RMSE}{\max(Y) - \min(Y)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2}{\max(Y) - \min(Y)}$$

Hodnota NRMSE pre modelovanie HDP pomocou Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie je NRMSE = 4,03%.

1.5 Simulácia

Vzhľadom na to, že pracujeme so štatistickými dátami v intervale jeden rok, model simulujeme v diskrétnom čase. Pre zhrnutie uvádzame ešte raz, ako sme kvantifikovali jednotlivé parametre modelu:

$A = 0,825$

$\alpha = 0,565$

$g = 0,0875$

$\delta = 0,0391$

$s = 0,317$

Základne rovnice modelu majú po kalibrácii nasledujúci tvar:

1. Produkčná funkcia $Y_t = 0,825 K_t^{0,565}\left(e^{0,0875t} L_t\right)^{0,435}$
2. Rovnica akumulácie kapitálu $K_{t+1} = K_t - 0,0391 K_t + 0,317\left(1-\tau_t\right) Y_t - NX_t$

V prvom roku skúmaného obdobia, t.j. roku 1995 platí $t = 0$. Začiatočnou hodnotou kapitálovej zásoby je: $K_0 = 157813$. Simulácia ekonomiky prebieha nasledujúcim spôsobom.

1. Na základe produkčnej funkcie vypočítame produkt v roku 1995 ($t = 0$)

$$Y_0 = 0,825 K_0^{0,565}\left(e^{0,0875\times 0} L_0\right)^{0,435} = 0,825 \times 157813^{0,565} \times \left(e^{0,0875\times 0} \times 3957\right) = 26170$$

2. Vypočítame kapitál v nasledujúcom období - roku 1996 ($t = 1$)

$$K_1 = K_0 - 0,0391 K_0 + 0,317\left(1-\tau_t\right) Y_0 - NX_0 =$$
$$= 157813 - 0,0391 \times 157813 + 0,317\left(1 - 0,220\right) 26170 - 567 = 157550$$

3. Vypočítame produkt v roku 1996 ($t = 1$)
4. Vypočítame kapitál v nasledujúcom období - roku 1997 ($t = 2$)

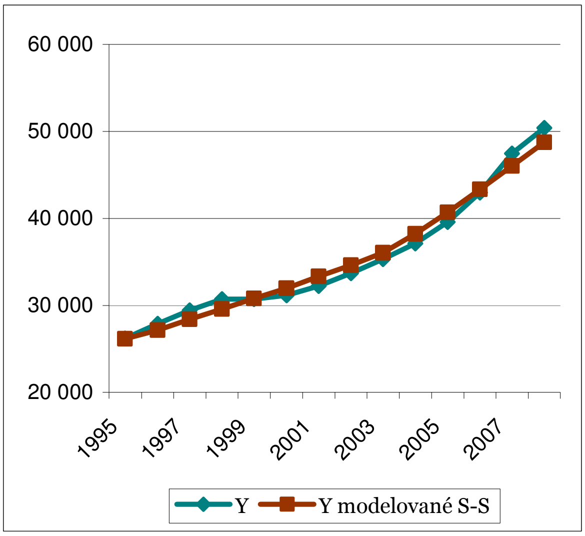
Atď.

Takýmto spôsobom pokračujeme do roku 2008. Aj napriek tomu, že z prvého na druhý rok Solow-Swan model predpokladá pokles kapitálovej zásoby, neskôr už kapitálová zásoba rastie.

Úspešnosť, s akou Solow-Swan model opisuje vývoj ekonomiky SR ilustrujú graf 2 a graf 3. Pri predpovedaní hodnoty produktu dosahuje Solow-Swan model NRMSE = 4,06%, pri predpovedí tempa rastu NRMSE = 19,66%.

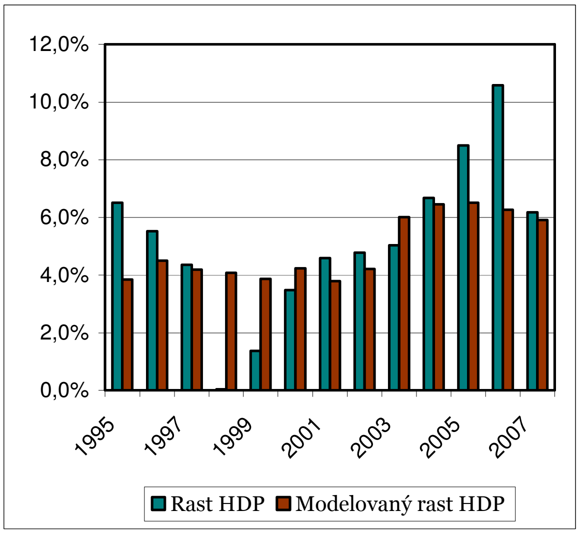
Graf 2

Solow-Swan model: Produkt



Graf 3

Solow-Swan model: Tempá rastu



Zdroje oboch grafov: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

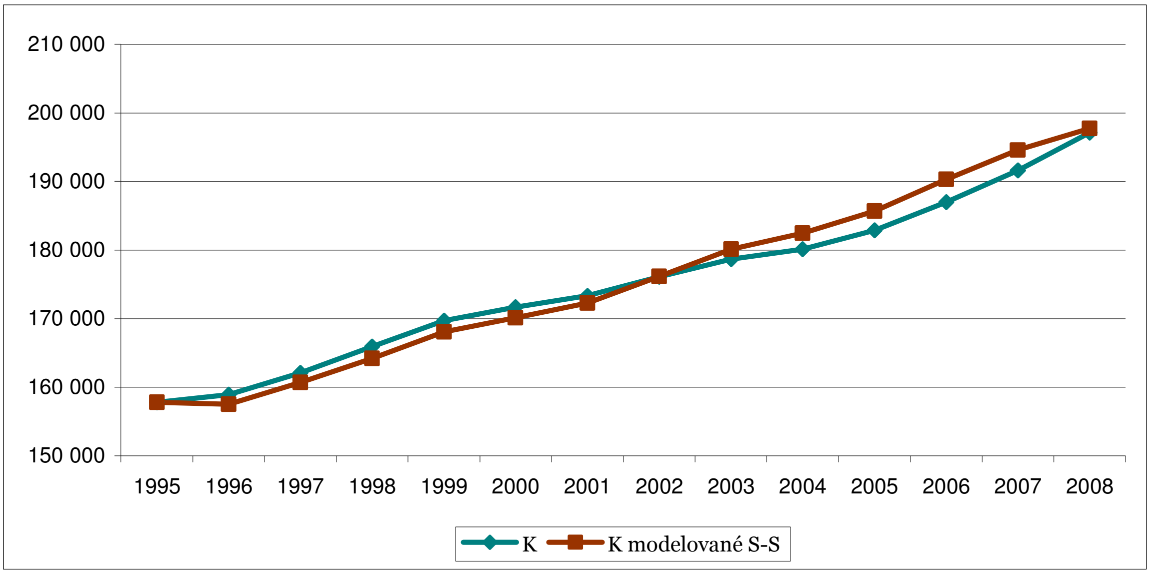
Ako vidíme, úspešnosť predpovedanie produktu je pri Solow-Swan modeli o niečo nižšia, ako pri samotnej Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii, čo je prirodzené, keďže Cobb-Douglasová produkčná funkcia *nie je ekonomickým modelom*. Solow-Swan model totiž nepovažuje kapitálovú zásobu sa exogénne danú, ale vysvetľuje jej vývoj, čo spôsobuje dodatočnú chybu.

Jedným z hlavných zdrojov chyby je relatívne vysoký sklon k úsporám v roku 1995 (s = 0,346) oproti priemeru (s = 0,317). Úspory a teda aj investície v prvom roku sú v modeli nižšie ako tomu bolo v skutočnosti. Ďalším problémom je predpoklad konštantnej miery opotrebenia. Skutočná nami vypočítaná miera opotrebenia má rastúci trend a v roku 1995 dosahovala iba 3,39%, čo je významne menej, ako je nami použitá priemerná hodnota 3,91% . Modelované investície v roku 1995 sú z týchto dôvodov vo výške 5 903 tis. EUR čo nepokrýva ani modelované opotrebenie kapitálu v tomto roku (6 165 tis. EUR); skutočné investície dosiahli hodnotu 6 495 tis. EUR, pričom skutočné opotrebenie dosiahlo iba 5 334 tis. EUR. Ako je vidieť na grafe 4, takto vzniknutá „strata“ na kapitálovej zásobe poznamenáva správanie sa modelu vo všetkých ďalších obdobiach.

Pre úplnosť uvádzame hodnotu chyby pri výpočte *hodnoty kapitálovej zásoby* NRMSE = 4,76% a výpočte *tempa rastu kapitálovej zásoby* NRMSE = 25,56%.

Graf 4

Solow-Swan model: Kapitál



Zdroje oboch grafov: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

1.6 Analýza

Veľmi zaujímavým sa stáva zostrojenie grafov k obrázkom 1 a 2. Produkčnú funkciu $f(\kappa)$ vieme zostrojiť nasledovne:

$$\frac{Y}{TL} = f(\kappa) = \frac{AK^{\alpha}(TL)^{1-\alpha}}{TL} = A\left(\frac{K}{TL}\right)^{\alpha} = A\kappa^{\alpha} = 0,825\kappa^{0,565}$$

Vzhľadom na to, že v našom modifikovanom modeli nie je podiel úspor na produkte konštantný (konštantný je podiel úspor na disponibilnom dôchodku) ale mení sa v závislosti od podielu spotreby verejného sektora na produkte (pozri rovnicu (1.6)), funkciu efektívnych úspor vypočítame pre priemernú hodnotu $\tau = 0,205$.

$$s(1-\tau)f(\kappa) = s(1-\tau)A\kappa^{\alpha} = 0,317(1-0,205)0,825\kappa^{0,565}$$

Funkcia efektívneho opotrebenia $(n+g+\delta)\kappa$ nadobúda tvar (pripomíname predpoklad n = 0):

$$\text{efektívne opotrebenie} = (n+g+\delta)\kappa = (0+0{,}0875+0{,}0391)\kappa$$

Aby sme mohli ekonomiku Slovenska analyzovať v kontexte Solow-Swan modelu, vypočítame pre každý rok hodnotu efektívnej kapitálovej vybavenosti, produktu na jednotku efektívnej práce a efektívnych domácich úspor.

Ako príklad uveďme výpočty pre rok 1995:

$$\kappa_0 = \frac{K_0}{T_0L_0} = \frac{K_0}{e^{g\times 0}L_0} = \frac{157813}{e^{0,0875\times 0}\times 3957} = 39{,}89$$

$$\frac{Y_0}{T_0L_0} = \frac{Y_0}{e^{g\times 0}L_0} = \frac{26194}{e^{0,0875\times 0}\times 3957} = 6{,}62$$

Pri výpočte efektívnych domácich úspor vychádzame z logiky, že domáce úspory sú súčtom investícií a čistého exportu:

$$\frac{S_0}{T_0L_0} = \frac{I_0+NX_0}{T_0L_0} = \frac{6495+567}{e^{0,0875\times 0}\times 3957} = 1{,}79$$

Tieto výpočty vykonáme pre všetky obdobia rovnako pre skutočné, ako aj modelované veličiny.

Podľa zlatého pravidla akumulácie kapitálu vypočítame hodnotu efektívnej kapitálovej vybavenosti v stálom stave (opäť pre priemernú hodnotu τ = *0,205*).

$$\kappa^* = \left[\frac{s(1-\tau)A}{\delta+n+g}\right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left[\frac{0{,}319(1-0{,}205)0{,}825}{0{,}0391+0+0{,}0875}\right]^{\left(\frac{1}{1-0,565}\right)} = 3{,}133$$

Uvedený postup nám umožní zostrojiť graf 5.

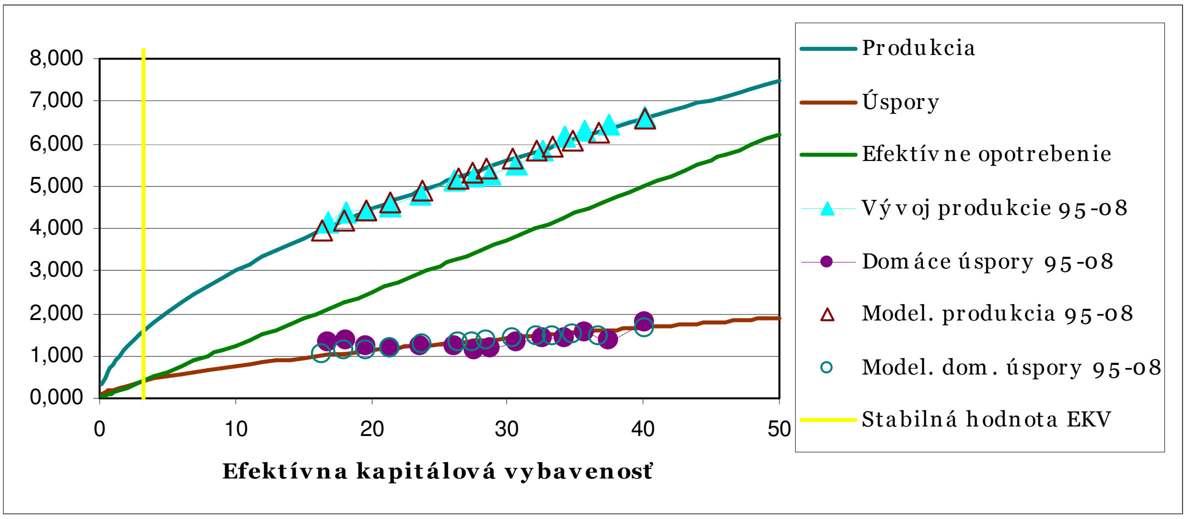
Plné trojuholníky a kruhy v grafe 5 znázorňujú skutočný vývoj ekonomiky SR, prázdne trojuholníky a kružnice zase modelovaný vývoj, pričom v čase sa ekonomika posúva smerom k stálemu stavu, t.j. sprava doľava.

Samotný záver, že ekonomika Slovenska je relatívne prekapitalizovaná je pomerne prekvapivý. Vzhľadom na to, že HDP per capita na Slovensku je nižšie, ako v krajinách západnej Európy, USA či Japonska očakávali by sme opačný výsledok. Na základe našich výpočtov však efektívna vybavenosť kapitálom v roku 1995 na úrovni κ = 39,89 bola nižšia, ako efektívna kapitalová vybavenosť v stálom stave κ^* = 3,133. Tento paradox môžeme pripísať dvom faktorom:

Je možné, že odhad Štatistického úradu SR ohľadom kapitálovej zásoby v roku 1999 je privysoký. Ak by sme však aj predpokladali kapitálovú zásobu na úrovni jednej polovici odhadu ŠÚ SR, nič by to nezmenilo na tom, že ekonomika SR by bola podľa Solow-Swan modelu prekapitalizovaná. Úroveň efektívnej kapitálovej vybavenosti v roku 1995 by bola na základe alternatívnych výpočtov κ = 18,44 by bola stále vyššia ako hodnota v stálom stave, ktorá by po dosadení novo získaných údajov dosiahla κ* = 6,334. Tento faktor nepostačuje na vysvetlenie prekapitalizovanosti ekonomiky SR.

Graf 5

Vývoj ekonomiky SR z pohľadu Solow-Swan modelu: Produkt, úspory, opotrebenie



Zdroj: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

Jedným z hlavných záverov Solow-Swan modelu je, že v okamihu, keď sa ekonomika dostane do stáleho stavu, HDP per capita bude do nekonečna pokračovať v raste tempom, ktoré je rovné tempu technologického pokroku g. V našom modeli, v ktorom g = 8,75% by to znamenalo, že dlhodobý rast ekonomiky bude takmer 9%, čo považujeme za veľmi nepravdepodobné. Pravdepodobným vysvetlením vysokej hodnoty g = 8,75%, ku ktorej sme sa výpočtami dopracovali je to, že veľká časť technologického pokroku v SR spočíva v preberaní technológií zo zahraničia. Ako sa bude postupne zužovať výkonnostná a technologická medzera medzi SR a vyspelými krajinami ako sú USA, Japonsko a krajiny západnej Európy, miera technologického pokroku v SR bude klesať. Ak by však bude miera technologického pokroku nižšia, z rovnice zlatého pravidla akumulácie kapitálu (1.5) vyplýva, že stála hodnota efektívnej kapitálovej vybavenosti bude vyššia. Intuitívne, keďže kapitál zastaráva pomalšie, je optimálne mať ho viac.

Predpokladajme, že v dlhom období klesne miera technologického pokroku na *g'* = *2%*. Predpokladajme zároveň, že od roku 2008 bude miera technologického pokroku rovná iba tejto hodnote a považujme rok 2008 za prvý rok nového obdobia a teda *t* = *0*. Produkčná funkcia pre rok 2008 bude mať tvar:

$$Y_0 = A' K'^{\alpha}_0 \left(e^{g' \times 0} L_0\right)^{1-\alpha}$$

A' – alternatívna hodnota úrovňovej konštanty; K' – kapitálová zásoba vypočítaná na základe polovičnej hodnoty odhadu ŠÚ SR v roku 1999; g' – alternatívna hodnota miery technologického pokroku

Upozorňujeme na to, že keďže rok 2008 považujeme za prvý rok skúmaného obdobia, musíme vypočítať aj novú hodnotu úrovňovej konštanty *A'*.

$$A' = \frac{Y_0}{K'^{\alpha}_0 \left(e^{g' \times 0} L_0\right)^{1-\alpha}} = \frac{50418}{203420^{0,565} \left(e^{0,02 \times 0} \times 3958\right)^{1-0,565}} = 1,376$$

Pomocou zlatého pravidla akumulácie kapitálu teraz vypočítame alternatívnu hodnotu *κ'**, pričom zmeníme iba hodnoty parametrov *A* a *g*.

$$\kappa'^* = \left[\frac{s(1-\tau)A'}{\delta + n + g'}\right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left[\frac{0,319(1-0,205)1,376}{0,0391+0+0,02}\right]^{\left(\frac{1}{1-0,565}\right)} = 60,161$$

Efektívna kapitálov vybavenosť v roku 2008 by bola

$$\kappa_0' = \frac{197157}{e^{0,02 \times 0} \times 3958} = 49,808$$

Ako vidíme, v tomto prípade by sa ekonomika SR v roku 2008 nachádzala pod stálym stavom. Či dospejeme k záveru, že ekonomika sa nachádza nad stálym stavom alebo nie, závisí od toho, aké tempo technologického pokroku počas nasledujúcich rokov predpokladáme.[13]

Pokračujme teraz v analýze kvantifikáciou obrázka 2. Podobným spôsobom, ako pri kvantifikácii obrázka 1 vypočítajme pre jednotlivé obdobia podiel efektívnych úspor $sf(\kappa) = S/TL$ a efektívnej kapitálovej vybavenosti *κ*. Pre ilustráciu uvedieme výpočet pre rok 1995:

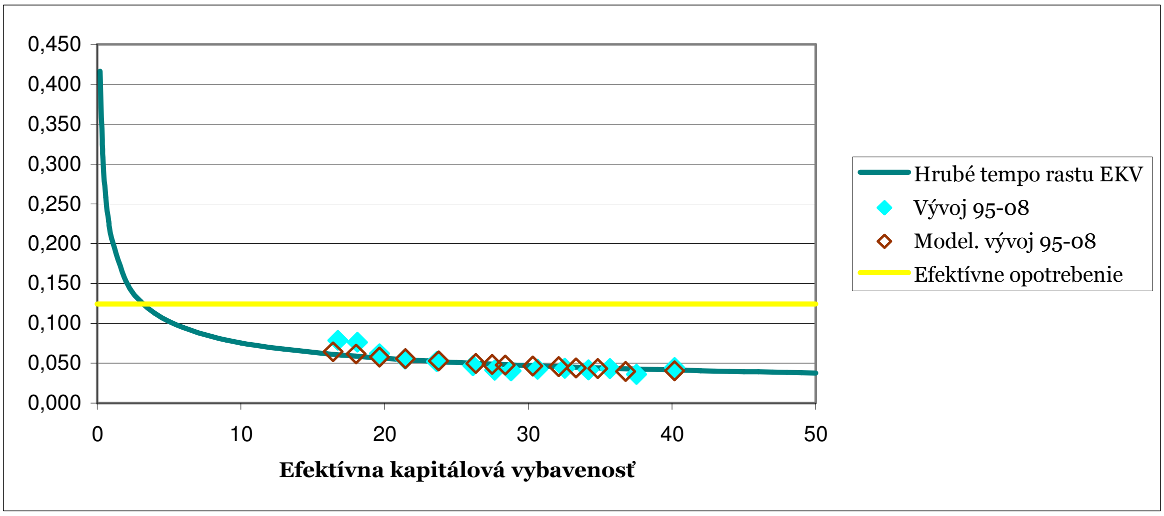
[13] Radi by som zdôraznili, že vzhľadom na to, že hodnoty parametrov produkčnej funkcie *A* a *g* sú pre alternatívny výpočet odlišné ako hodnoty, ktoré používame inde, hodnoty efektívnej kapitálovej vybavenosti pre alternatívny a hlavný výpočet *nie sú porovnateľné*, význam má len porovnanie ich vzťahu s efektívnou kapitálovou vybavenosťou v stabilnom stave.

$$\frac{\frac{S_0}{T_0 L_0}}{\kappa_0} = \frac{1,79}{39,89} = 0,045$$

Výpočty vykonáme pre skutočné aj modelované hodnoty a zostrojíme graf 6 mapujúci hrubé a čisté tempo rastu efektívnej kapitálovej zásoby ako funkciu jej absolútnej výšky. Vývoj taktiež prebieha sprava doľava, pozorujeme konvergenciu k stálemu stavu.

G r a f 6

Vývoj ekonomiky SR z pohľadu Solow-Swan modelu: Tempo rastu efektívnej kapitálovej vybavenosti



Zdroj: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

2 Kaldorov model ekonomického rastu

V roku 1957, rok po zverejnení Solowovho a Swanovho článku, publikoval jeden z najvýznamnejších nasledovníkov Johna M. Keynesa – Nicolas Kaldor – článok s názvom *A Model of Economic Growth* (Kaldor, 1957). Kaldor nadviazal na pokusy sira Roya F. Harroda a Evseyho D. Domara o dynamizáciu Keynesovho pohľadu na ekonomiku. Je potrebné podotknúť, že Kaldor aj po tomto článku pokračoval vo svojom výskume v oblasti ekonomického rastu a v roku 1962 publikoval článok *New Model of Economic Growth* (Kaldor, 1962), v ktorom modifikoval mnohé z predpokladov z roku 1957.[14] Pri mene Nicolasa Kaldora sa nám žiada spomenúť, že

[14] Zdá sa nám, že možno povedať, že Kaldor svojim „stelesneným technologickým pokrokom" v tomto článku predbieha o 30 rokov model endogénneho rastu Aghiona a Howitta (Aghion – Howitt, 1962). Kaldor rovnako ako neskôr Aghion a Howitt predpokladá, že rast produktivity vzniká ako následok

je to práve Nicolas Kaldor, ktorému ekonomická disciplína vďačí za štylizované empirické fakty o ekonomickom raste[15].

Aj napriek tomu, že Kaldorov model je keynesovským modelom, pokladáme za veľmi vhodné opísať na tomto mieste jeho fungovanie, keďže Kaldorov model sa v mnohých črtách podobá Solow-Swan modelu.

2.1 Filozofia Kaldorovho modelu

2.1.1 Technologický pokrok

Kaldor odmieta pracovať s akoukoľvek špecifickou formou produkčnej funkcie, ktorá by vysvetľovala zmenu v HDP per capita ako výsledok dvoch oddelených vplyvov – zmeny množstva kapitálu a zmeny produktivity resp. technológie (ako je to v prípade Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie).[16] Kaldor argumentuje, že zavádzanie modernejšej technológie sa deje cez inštaláciu modernejšieho kapitálu (ide o tzv. „stelesnený“ technologický pokrok). Na vysvetlenie rastu HDP používa Kaldor namiesto produkčnej funkcie tzv. *funkciu technologického pokroku – TT*' krivku, ktorá znázorňuje vzťah medzi tempom rastu kapitálovej vybavenosti (t.j. kapitálu na jedného pracovníka) a tempom rastu produktu na jedného pracovníka.

Kaldor najprv predpokladá, že s vyšším tempom rastu kapitálu sa zvyšuje tempo rastu produktu, avšak ak tempo rastu kapitálu rastie do nekonečna, tempo rastu produktu *nerastie* do nekonečna, ale konverguje k istej hornej hranici (túto funkciu znázorňuje na obrázku 4 prerušovaná krivka). Aby však mohol Kaldor svoj model pomocou jednoduchej algebry riešiť, je nútený špecifikovať tvar *TT*' krivky a zavádza predpoklad *lineárnej závislosti* medzi tempom rastu produktu a tempom rastu kapitálu na jedného pracovníka. Je potrebné zdôrazniť, že hlavné závery Kaldorovho modelu ostanú po tomto zjednodušení nezmenené. Označme y produkt na jedného pracovníka a k kapitál na jedného pracovníka

$$y = \frac{Y}{L}; k = \frac{L}{L}$$

---

toho, že sa inštaluje *modernejší* kapitál. Aghion a Howitt neskôr modelujú aj to, ako prebieha vývoj modernejšieho druhu kapitálu.

[15] Ide o nasledovných šesť známych faktov (Kaldor, 1963): (1) HDP per capita v čase rastie a tempo jeho rastu neklesá, (2) zásoba fyzického kapitálu v čase rastie, (2) miera návratnosti kapitálu je takmer konštantná, (3) miera návratnosti kapitálu je takmer konštantná, (4) pomer fyzického kapitálu k produktu je takmer konštantný, (5) podiel práce a fyzického kapitálu na dôchodku je takmer konštantný, (6) miera rastu produktu na pracovníka medzi jednotlivými krajinami sa výrazne líši.

Všimnime si, že okrem posledného šiesteho faktu dokáže v dlhom období Solow-Swan model vysvetliť všetky tieto javy.

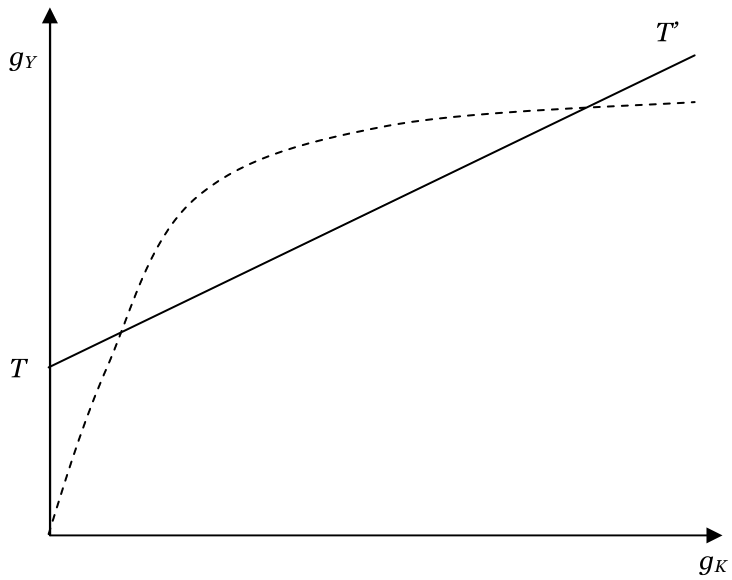
[16] Pre veľmi zaujímavú a podnetnú kritiku myšlienky *agregátnej produkčnej funkcie*, na ktorej je založený nie len Solow-Swan model ale celá teória ekonomického rastu pozri Felipe, Franklin, 2001.

a označme g_y, g_k a g_Y, g_K príslušné tempá rastu:

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k}; g_y = \frac{\dot{y}}{y}; g_K = \frac{\dot{K}}{K}; g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

O b r á z o k 4

Technologický pokrok v Kaldorovým modeli



Zdroj: Vlastné spracovanie podľa Kaldor, 1957

Ak spolu s Kaldorom predpokladáme, že veľkosť pracovnej sily v ekonomike je konštantná (tento predpoklad sme použili aj pri kalibrácii Solow-Swan modelu, keďže sme používali $n = 0$), tempo rastu *produktu* a *kapitálu* je rovné tempu rastu *produktu per capita* a *kapitálovej vybavenosti*.

$$\dot{L} = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}}{y}; g_Y = g_y$$

$$\dot{L} = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}}{k}; g_K = g_k$$

Keďže Kaldor predpokladá lineárny vzťah, môžeme zapísať:

$g_y = \beta_0 + \beta_1 g_k$ resp. $g_Y = \beta_0 + \beta_1 g_K$

β_0, β_1 - parametre

Vráťme sa teraz k Solow-Swan modelu, konkrétne ku Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii.

$$Y = AK^{\alpha}\left(e^{gt}L\right)^{1-\alpha}$$

Pre produkt per capita platí:

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,TL)}{L} = \frac{AK^{\alpha}\left(e^{gt}L\right)^{1-\alpha}}{L} = Ak^{\alpha}e^{g(1-\alpha)t}$$

Vyjadrime teraz tempo rastu produktu per capita v čase:

$$g_y = \frac{dy/dt}{y} = \frac{\frac{Ak^{\alpha}e^{g(1-\alpha)t}}{dt}}{Ak^{\alpha}e^{g(1-\alpha)t}} = \frac{A\left[\frac{d\left(k^{\alpha}\right)}{dt}\right]e^{g(1-\alpha)t} + Ak^{\alpha-1}\left[\frac{d\left(e^{g(1-\alpha)t}\right)}{dt}\right]}{Ak^{\alpha}e^{g(1-\alpha)t}} = \frac{\frac{d\left(k^{\alpha}\right)}{dt}}{k^{\alpha}} + \frac{\frac{d\left(e^{g(1-\alpha)t}\right)}{dt}}{e^{g(1-\alpha)t}} =$$

$$= \frac{\alpha k^{\alpha-1}\frac{dk}{dt}}{k^{\alpha}} + \frac{g(1-\alpha)te^{g(1-\alpha)t}}{e^{g(1-\alpha)t}} = \alpha\frac{\frac{dk}{dt}}{k^{\alpha}} + g(1-\alpha)$$

$$g_y = \alpha g_k + g(1-\alpha) \tag{2.1}$$

Z Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie teda vyplýva, že tempo rastu produktu per capita je *lineárne závislé* od tempa rastu kapitálovej vybavenosti, čo je zároveň predpoklad, na ktorom je založený Kaldorov model. Toto je prvá spoločná črta Kaldorovho a Solow-Swan modelu. Kaldor však na rozdiel od Solowa odmieta predpoklad existencie produkčnej funkcie.

2.1.2 Správanie sa domácnosti

Kaldor, rovnako ako Solow, preberá Harrodovský predpoklad konštantného sklonu k úsporám. Kaldor však ide o niečo ďalej a predpokladá, že sklon k úsporám zo ziskov je *vyšší* ako sklon k úsporám z miezd. Aj napriek tomu, že tento predpoklad by bol v súčasných moderných makroekonomických modeloch nepoužiteľný,[17] práve kvôli nemu spomíname Kaldorov model v tejto štúdii. Zaujíma nás, či by nám tento predpoklad pomohol lepšie modelovať vývoj ekonomiky SR. Kaldor predpokladá nasledujúci vzťah:

$$S = s_W W + s_P P$$
$$0 \le s_W < s_P \le 1$$

[17] Čo platí rovnako o Solowovom resp. Harrodovom predpoklade konštantného sklonu k úsporám. Základným stavebným kameňom v súčasnosti používaných modelov je Ramsey-Cass-Koopmans model.

s_W – sklon k úsporám z miezd; W – suma miezd; s_P – sklon k úsporám zo ziskov; P – suma ziskov

Predelením oboch strán produktom *Y* môžeme získať:

$$\frac{S}{Y} = s_W \frac{W}{Y} + s_P \frac{P}{Y}$$

Pomer S/Y predstavuje priemerný sklon k úsporám, W/Y je podiel miezd na produkte, P/Y je podiel ziskov na produkte. Keďže celkový produkt je rovný súčtu sumy miezd a ziskov

$$Y = W + P$$

môžeme zapísať:

$$\frac{S}{Y} = s_W \left(1 - \frac{P}{Y}\right) + s_P \frac{P}{Y}$$

$$\frac{S}{Y} = s_W - s_P \frac{P}{Y} + s_P \frac{P}{Y}$$

$$\frac{S}{Y} = \frac{P}{Y}(s_P - s_W) + s_W \tag{2.2}$$

Priemerný sklon k úsporám S/Y teda závisí od podielu ziskov na produkte.

2.1.3 Predpoklad plnej zamestnanosti

Ďalším podobným znakom Kaldorovho a Solow-Swan modelu prevzatým z práce Harroda je predpoklad plnej zamestnanosti (čo môže byť v prípade keynesovského modelu prekvapivé). Tento predpoklad však Kaldor vysvetľuje úplne inak ako Solow (ktorý vychádzal z neoklasickej hraničnej analýzy a predpokladu čistenia trhu práce). Kaldor vychádza z keynesovskej analýzy založenej na myšlienke efektívneho dopytu. V prípade, že sa ekonomika nachádza pod potenciálnym produktom – nedosahuje sa teda plná zamestnanosť – vzniká tlak na pokles cien. Pokles cien sa v prípade nedokonale pružných miezd prejaví na poklese ziskov. Ak suma ziskov klesne, pričom suma miezd ostane nezmenená, klesne *podiel* ziskov na produkte a teda aj priemerný sklon k úsporám (pozri rovnicu (2.2)). Z tohto dôvodu vzrastie spotreba a s ňou aj efektívny dopyt, ktorý vytvorí tlak na rast zamestnanosti. Tento mechanizmus funguje aj opačne, v prípade nadmerného efektívneho dopytu – „prehriatia ekonomiky“ – vzniká tlak na pokles zamestnanosti. V Kaldorovom modeli to nie sú pružné mzdy, čo vedie k plnej zamestnanosti, ale podiel ziskov na produkte.[18]

[18] Kaldor vo svojom článku *Alternative Theories of Distribution* z rokov 1955-1956 ako prvý buduje *keynesovskú* teóriu rozdeľovania, ktorá spolu s Ricardo-Marxistickou a Kaleckého teóriou predstavuje protipól neoklasickej teórii. Podrobnejšie pozri v Kaldor, 1955-1956.

2.1.4 Správanie sa firiem

Aby mohol svoj model matematicky riešiť, robí Kaldor celý rad zjednodušujúcich podmienok ohľadom správania sa firiem. Najdôležitejším z nich je predpoklad, že firmy investujú tak, aby udržiavali konštantný pomer medzi kapitálom a celkovým produktom $(K/Y)^*$. Zdôraznime, že ide o typický keynesovský predpoklad (prítomný, samozrejme aj v Harrod-Domar modeli) a zapakujme, že práve tento predpoklad porušil Robert M. Solow, keď konštruoval svoj model – ide o najdôležitejší rozdiel medzi Solowovým a Kaldorovým modelom. Všimnime si ďalší typický keynesovský predpoklad: Investície nezávisia od úrokovej miery ale od prírastku produktu – investície sú autonómne, Kaldor využíva princíp *akcelerátora*.[19]

V Kaldorovom modeli cieľový pomer $(K/Y)^*$ závisí od tzv. „miery zisku," t.j. podielu sumy ziskov a kapitálu P/K (vyššia miera zisku vedie k vyššiemu želanému pomeru $(K/Y)^*$), zjednodušme však model a predpokladajme, že cieľový pomer $(K/Y)^*$ je exogénne určený a v prvom období skutočne platí $K_0/Y_0 = (K/Y)^*$.

$$\frac{K_0}{Y_0} = \left(\frac{K}{Y}\right)^* = \theta$$

(K/Y) – želaný pomer kapitálovej zásoby a produktu; θ – kapitálový koeficient*

Firmy investujú tak, aby bol pomer K/Y v čase *t+1* rovný pomeru K/Y v čase *t*. Problémom však je, že firmy nepoznajú výšku produktu v čase *t+1* a môžu ju iba odhadovať.

$$\frac{K_{t+1}}{E(Y_{t+1})} = \frac{K_t}{Y_t} = \theta \qquad (2.3)$$

Kaldor abstrahuje od opotrebenia a predpokladá funkciu akumulácie $K_{t+1} = K_t + I_t$. Po dosadení tejto rovnice akumulácie do (2.3) získavame:

$$\frac{K_t + I_t}{E(Y_{t+1})} = \theta$$

Všimnime si, že tento mechanizmus môže fungovať *iba* ako je sklon k úsporám zo ziskov väčší, ako sklon k úsporám z miezd. V opačnom prípade by bol systém nestabilný.

[19] Spomeňme už teraz, že v Ramsey-Cass-Koopmans modeli budú v súlade s neoklasickým prístupom investície závisieť od úrokovej miery. Úroková miera bude rovná hraničnému produktu kapitálu a bude vplývať na ochotu domácnosti sporiť.

Ďalším zjednodušujúcim predpokladom je: Firmy predpokladajú, že tempo rastu produktu z obdobia *t* do obdobia *t+1* bude rovnaké ako v predchádzajúcom období (z obdobia *t-1* do obdobia *t*).[20]

$$\frac{K_t + I_t}{E\left(Y_{t+1}\right)} = \frac{K_t + I_t}{\left(1+g_{Y;t}\right)\times Y_t} = \theta$$

$$I_t = \theta\times\left(1+g_{Y;t}\right)\times Y_t - K_t$$

$$\frac{I_t}{Y_t} = \theta\times\left(1+g_{Y;t}\right) - \frac{K_t}{Y_t}$$

$$\frac{I_t}{Y_t} = \theta\times\left(1+g_{Y;t}\right) - \theta$$

$$\frac{I_t}{Y_t} = \theta\times g_{Y;t} \quad (2.4)$$

[21]

Želané investície v čase t sú teda funkciou odhadovaného produktu v čase t+1 a kapitálovej zásoby v čase t.

Keďže investície sa musia rovnať úsporám, musí platiť:

$$S = I$$

Čo sa stane, ak táto rovnosť neplatí? V prípade, že investície prevyšujú úspory pozorujeme *nadbytočné efektívny dopyt*, vzniká tlak na rast cien a rast sumy ziskov a podielu ziskov na produkte čo znamená nárast úspor až kým sa úspory a investície nebudú rovnať – mechanizmus ktorý sme opísali v časti 2.1.3 a ktorý samozrejme funguje aj opačným smerom.

Všimnime si teraz zásadný rozdiel medzi Solowovým neoklasickým a Kaldorovým keynesovským pohľadom na problematiku rozdeľovania dôchodkov. V neoklasickom modeli je to parameter α, ktorý určuje rozdelenie dôchodku na mzdy $W = (1-\alpha)Y$

[20] Všimnime si *neracionálnosť* takýchto predpokladov. Firmy budú v každom období predpokladať, že tempo rastu produktu z obdobia *t* do obdobia *t+1* bude rovnaké ako v predchádzajúcom období aj napriek tomu, že sa táto predpoveď v minulosti ani raz nepotvrdila. Metodologickú revolúciu v makroekonómii spustil Robert E. Lucas (zároveň jedna z hlavných postáv teórie ekonomického rastu) hypotézou racionálnych očakávaní. V modeloch založených na racionálnych očakávaniach by firmy využili všetky dostupné informácie na predpovedanie tempa rastu, skúmali by vplyv svojich rozhodnutí na budúce tempo rastu a ich odhad by bol vždy správny. V Kaldorovom modeli je ich odhad vždy nesprávny. Bližšie o racionálnych (ako aj Friedmanovských adaptívnych) očakávaniach v Lisý, 2005.

[21] Táto rovnica je rovnaká ako v Harrod-Domar modeli s tým rozdielom, že tempo rastu produktu nezáleží od miery úspor ale od funkcie technologického pokroku.

a zisky (resp. dôchodky z kapitálu) $P=\alpha Y$. V Kaldorovom keynesovskom modeli určuje podiel miezd a ziskov na produkte nutnosť rovnosti úspor a investícií.[22] Toto je jeden z hlavných rozdielov medzi Kaldorovým a Solowovým modelom, ktorý vyplýva z rozdielov medzi keynesovskou a neoklasickou teóriou rozdeľovania.

Z funkcie (2.2) vyplýva, že existuje iba jedna hodnota podielu ziskov na produkte, ktorá zabezpečí rovnosť úspor a investícií pre konkrétnu hodnotu investícií:

$$\frac{I}{Y}=\frac{P}{Y}\left(s_P-s_W\right)+s_W$$

$$\frac{P}{Y}=\frac{I}{Y}\frac{1}{s_P-s_W}+\frac{s_W}{s_P-s_W} \tag{2.5}$$

Po dosadení (2.4) do (2.5) získavame:

$$\frac{P_t}{Y_t}=\frac{\theta\times g_{Y;t}}{s_P-s_W}+\frac{s_W}{s_P-s_W}$$

2.2 Riešenie modelu v dlhom období

Správanie sa modelu v krátkom období sme vysvetlili. Zhrňme ho nasledovne:

1. Firmy sa snažia udržiavať konštantný pomer kapitálovej zásoby a produktu na úrovní θ. Keďže predpokladajú, že tempo rastu produktu v čase *t* bude rovnaké, ako v čase *t-1* je pre nich optimálne investovať také množstvo, že $I_t/Y_t=\theta\times g_{Y;t}$.

2. Vzhľadom na to, že úspory sa musia rovnať investíciám a úspory závisia od podielu ziskov na produkte $S/Y=\left(P/Y\right)\left(s_P-s_W\right)+s_W$, podiel ziskov na produkte klesne alebo stúpne na takú hodnotu, aby platila rovnosť $S = I$, t.j.:

---

[22] Kaldor dokonca píše: *„V skutočnosti, celý prístup ktorý považuje podiel miezd a ziskov na produkte za determinovaný hraničnou mierou substitúcie medzi kapitálom a prácou [...] je iba ťažko akceptovateľný pre súčasného ekonóma.“* Kaldor, 1955-1956, s. 91

Aby sme objasnili tento Kaldorov postoj, spomeňme, že Kaldor z veľkej časti odmietal neoklasickú - marginalistickú – teóriu rozdeľovania založenú na neoklasickej teórii oceňovania. Toto odmietanie možno ilustrovať na tzv. „Cambridgeskej kapitálovej kontroverzii“ (*Cambridge capital controversy; CCC*). Neoklasická teória predpokladá, že cena kapitálu je rovná jeho hraničnému produktu. Na to, aby sme mohli určiť hraničný produkt kapitálu potrebujeme vedieť jeho množstvo. Avšak kapitál nie je možné merať vo fyzických jednotkách (jedna z hlavných protagonistov *CCC* – Joan Robinsonová – sa pýta, ako možno spočítať písacie stroje a lokomotívy), je potrebné ho teda merať v peňažných jednotkách – každý druh kapitálu vynásobíme jeho cenou a výsledne hodnoty spočítame. Aby sme to mohli urobiť, potrebujeme však *najprv* poznať ceny jednotlivých druhov kapitálu a teda blúdime v kruhu.

$$\frac{P_t}{Y_t} = \frac{\theta \times g_{Y;t}}{s_P - s_W} + \frac{s_W}{s_P - s_W}$$

Ostáva určiť, ako sa bude ekonomika správať v dlhom období. Vráťme sa k funkcii technologického pokroku – k *TT'* krivke. Správanie sa ekonomiky uvedieme na príklade.

Použime ako názorný príklad funkcie technologického pokroku nasledujúcu funkciu (použili sme hodnoty, na základe ktorých sme kalibrovali Solow-Swan model: $\beta_0 = g(1-\alpha)$ a $\beta_1 = \alpha$. Pozri rovnicu (2.1)):

$$g_y = 0,0381 + 0,565 g_k$$

Predpokladajme, že v prvom období je tempo rastu kapitálu (a teda aj kapitálovej vybavenosti) nulové. Tempo rastu produktu je teda g_Y = 3,81%. V nasledujúcom období firmy predpokladajú, že tempo rastu produktu bude opäť g_Y = 3,81%, aby udržali pomer K/Y konštantný, investujú tak, aby sa kapitálová zásoba zvýšila o 3,81%. Vo všeobecnosti môžeme zapísať

$$\frac{K_t - K_{t-1}}{K_t} = \frac{Y_{t-1} - Y_{t-2}}{Y_{t-1}} \text{ resp. } g_{k;t} = g_{y;t-1}$$

Tempo rastu kapitálu bude g_K = 3,81%. Produkt však z tohto dôvodu vzrastie nie o 3,81% ale o $g_y = 3,81\% + 0,565 \times 3,81\% = 5,96\%$. Firmy z rovnakého dôvodu zvýšia v ďalšom období kapitálovú zásobu o 5,96% a preto produkt vzrastie o $g_y = 3,81\% + 0,565 \times 5,96\% = 7,17\%$. Tento proces pokračuje dovtedy, kým sa tempo rastu produktu a tempo rastu kapitálovej zásoby nerovná:

$$g_k = g_y = g^*$$

$$g^* = \beta_0 + \beta_1 g^*$$

$$g^* = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} \tag{2.6}$$

V našom príklade $g^* = \beta_0 / (1-\beta_1) = 0,0381/(1-0,565) = 8,75\%$. Tento proces ilustruje obrázok 5.

Všimnime si, že dlhodobé tempo rastu kapitálu a produktu je rovnaké, ako predpokladá Solow-Swan model! Je to prirodzeným dôsledkom toho, že sme použili $\beta_0 = g(1-\alpha)$ a $\beta_1 = \alpha$. Po dosadení do (2.6) získame:

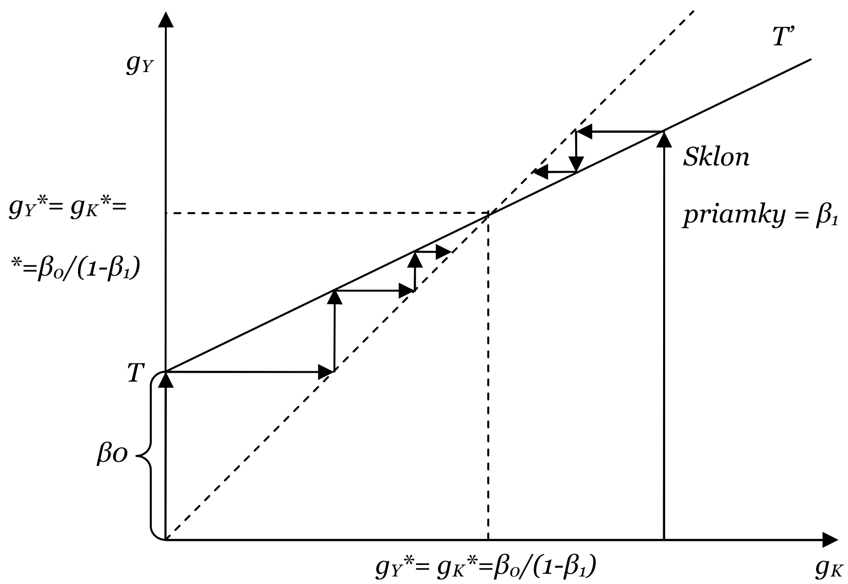
$$g^* = \frac{g(1-\alpha)}{1-\alpha} = g$$

Ako sme zistili, Kaldorov a Solow-Swan modely majú ďalšiu spoločnú vlastnosť: Predpokladajú, že v dlhom období je tempo rastu produktu a tempo rastu kapitálu rovnaké a je dané exogénne ($g^* = \beta_0/(1-\beta_1)$ v prípade Kaldorovho modelu, g v prípade Solow-Swan modelu).

Navyše, toto tempo rastu je úplné nezávislé od sklonu k úsporám. V tomto bode sa Kaldorov model približuje neoklasickému Solow-Swan modelu a vzďaľuje sa od keynesovského Harrod-Domar modelu, v ktorom je („zaručené“) tempo rastu rovné podielu sklonu k úsporám s a kapitálového koeficientu θ – priamo teda závisí od sklonu k úsporám.

O b r á z o k 5

Správanie sa Kaldorovho modelu v dlhom období



Zdroj: Vlastné spracovanie podľa Kaldor, 1957

2.3 Aplikácia modelu

Aplikácia Kaldorovho modelu je náročnejšia, ako aplikácia Solow-Swan modelu, keďže Kaldorov model nedokáže (a ani nemá ambíciu) predpovedať tempo rastu a hodnotu produktu. Sústredíme sa teda iba na tri problémy (1) funkciu technologického pokroku, (2) funkciu úspor a (3) funkciu akumulácie kapitálu a pokúsime sa zodpovedať, aké nové poznatky môžeme na základe týchto funkcií získať.

2.3.1 Funkcia technologického pokroku

TT' krivku $g_y = \beta_0 + \beta_1 g_k$ možno kvantifikovať priamo pomocou regresnej analýzy. Všimnime si, že v prípade Solow-Swan modelu, kde z Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie vyplývalo $g_y = \alpha g_k + g(1-\alpha)$, sme parameter α – teda sklon priamky – odhadli pomocou národných účtov, nie pomocou štatistickej regresnej analýzy. Regresná analýza nám umožní vybrať takú hodnotu sklonu α resp. β_0, ktorá pomôže vysvetliť variabilitu tempa rastu produktu per capita čo najpresnejšie – s veľkou pravdepodobnosťou sa bude táto hodnota líšiť od hodnoty, ktorú sme určili na základe národných účtov.

Vypočítame veľkosť kapitálovej zásoby na jednotku pracovnej sily *k,* veľkosť produktu na jednotku pracovnej sily *y* a ich tempá rastu. Ako jednotku pracovnej sily použijeme rovnako ako v prípade Solow-Swan modelu 1 mil. odpracovaných hodín.

T a b u ľ k a 4

Kaldorov model: Výpočet funkcie technologického pokroku

	Y	K	y	k	g_y	g_k
1995	26 194	157 813	6,62	39,89		
1998	30 722	165 934	8,01	43,28	6,58%	4,54%
2001	32 237	173 329	8,85	47,56	4,36%	1,82%
2004	37 105	180 137	10,42	50,57	1,92%	-2,18%
2008	50 418	197 157	12,74	49,81	3,71%	0,52%

Údaje v mil. EUR

Zdroj: Štatistický úrad SR; Eurostat; vlastné výpočty

Vykonáme regresnú analýzu v podobe:

$$g_y = \beta_0 + \beta_1 g_k$$

Odhadované hodnoty parametrov β_0 a β_1 sú $\beta_0 = 0{,}0464$ a $\beta_1 = 0{,}308$ (uveďme, že hodnoty použité pri kalibrácii Solow-Swan modelu implikujú $\beta_0 = 0{,}0381$ a $\beta_1 = 0{,}565$) [23]. Problémom však je štatistická nevýznamnosť takto zistených parametrov. Uveďme na ilustráciu hodnotu koeficientu determinácie $R^2 = 0{,}127$. Inak povedané, odhady sú $\beta_0 = 0{,}0464$ a $\beta_1 = 0{,}308$ sú *veľmi* nepresné a nemožno vylúčiť, že skutočné hodnoty β_0 a β_1 sú tie, ktoré sme použili pri Solow-Swan modeli (nulové hypotézy $\beta_0 = 0{,}0381$ a $\beta_1 = 0{,}565$ nie je možné zamietnuť ani pri veľmi nízkych hladinách významnosti). Optimistickejšie výsledky nezískame, ani keď predpokladáme, že

[23] Štandardná chyba parametru $\beta 0$ je na úrovni 0,007; štandardná chyba parametru β_1 je 0,243.

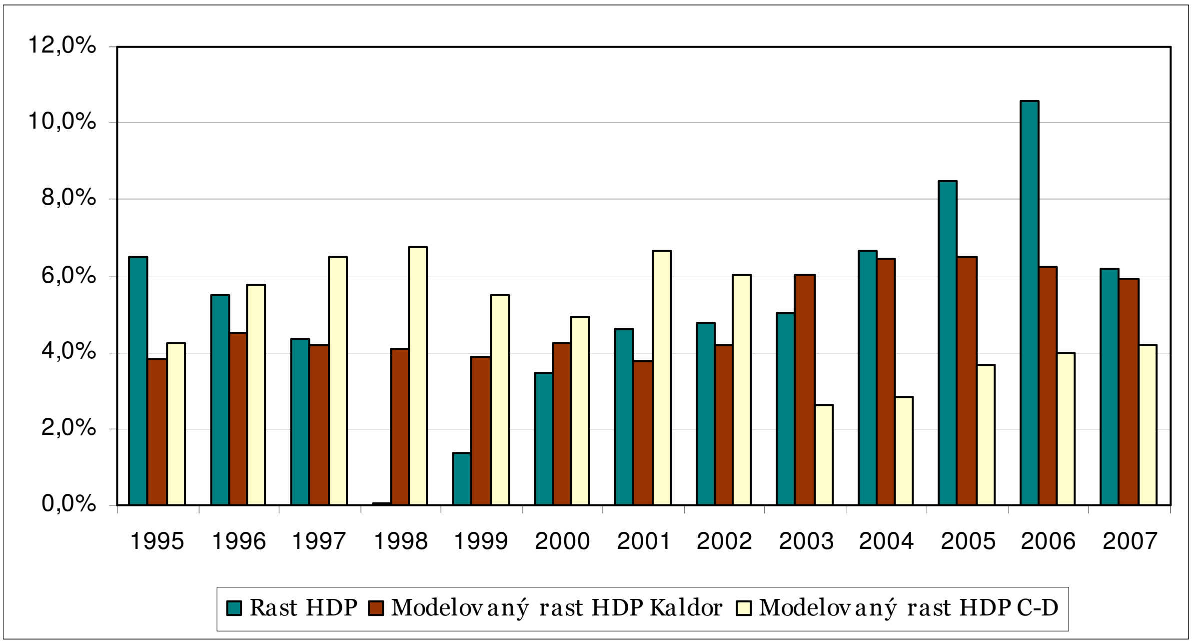
odhad štatistického úradu o kapitálovej zásobe v roku 1999 je privysoký a vykonáme alternatívne výpočty pre polovičnú úroveň kapitálu v roku 1999.

V grafe 7 porovnáme skutočné tempá rastu HDP, predpovedané tempá rastu produktu per capita, ktoré vyplývajú z Kaldorovej funkcie technologického pokroku a tempá rastu HDP per capita, ktoré implikuje Cobb-Douglasová produkčná funkcia použitá v Solow-Swan modeli. Hodnota NRMSE pre Kaldorovú funkciu je NRMSE = 31%, pre Cobb-Douglasovú produkčnú funkciu NRMSE = 33,04%.

Môžeme pozorovať, že Kaldorová funkcia technologického pokroku opisuje skutočný rast HDP o lepšie, ako nami použitá Cobb-Douglasová produkčná funkcia. Je to priamym dôsledkom toho, že v Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii sme parameter α kvantifikovali na základe národných účtov a nie regresnou analýzou, takže tento výsledok nie je prekvapivý. Ak vypočítame α pomocou národných účtov, Kaldorová funkcia vždy opíše tempo rastu HDP aspoň tak dobre ako Cobb-Douglasová produkčná funkcia, ak by sme ho určili regresnou analýzou, oba funkcie by opísali tempo rastu HDP rovnako.

G r a f 7

Modelované tempá rast – Kaldor vs. Cobb-Douglas



Zdroj: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

Zaujímavé je vypočítať dlhodobé tempo rastu kapitálovej zásoby a produktu per capita, ktoré nami odhadnutá funkcia technologického pokroku implikuje:

$$g^* = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} = \frac{0,0464}{1-0,308} = 6,71\%$$

Kaldorov model predpovedá dlhodobé tempo rastu na úrovni 6,71%, čo je menej, ako predpoveď Solow-Swan modelu (a ako bude predpoveď Ramsey-Cass-Koopmans modelu), t.j. 8,75%. V tomto bode sa Kaldorov model správa „realistickejšie“ ako Solow-Swan model.

2.3.2 Funkcia úspor

Jedným z kľúčových predpokladov Kaldorovho modelu je väčší sklon k úsporám zo ziskov v porovnaní so sklonom k úsporám z miezd. Dosaďme do (2.5) $s = S/Y$ aby sme získali:

$$s = \frac{P}{Y}(s_P - s_W) + s_W$$

Keďže $Y = W + P$ resp. $(P/Y) + (W/Y) = 1$, je prirodzené použiť ako hodnoty podielu miezd na produkte hodnoty upraveného podielu miezd AWS, ktoré sme vypočítali v časti 1.4.3. Podiely ziskov na produkte v jednotlivých obdobiach vypočítame ako

$$\frac{P}{Y} = 1 - AWS$$

Sklony k úsporám z disponibilného dôchodku vypočítané rovnako ako pri kalibrácií Solow-Swan modelu (t.j. $s = 1 - \left[C/(Y-G)\right]$), hodnoty AWS a podiely ziskov na produkte zobrazuje tabuľka 5.

Vykonáme regresnú analýzu v nasledujúcej forme

$$s = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{P}{Y}$$

γ_0 – úrovňová konštanta; γ_1 – sklon regresnej priamky

pričom platí

$$s_W = \gamma_0$$
$$s_P - s_W = \gamma_1 .$$
$$s_P = \gamma_0 + \gamma_1$$

Z podmienky $0 \le s_W < s_P \le 1$ môžeme odvodiť nasledujúce podmienky, ktoré musia platiť pre odhadnuté parametre γ_0 a γ_1:

$$0 \le \gamma_0 \le 1$$
$$\gamma_0 \le \gamma_1$$
$$\gamma_0 + \gamma_1 \le 1$$

Spĺňajú odhadované parametre tieto podmienky? Odhadované hodnoty sú $\gamma_0 = -0{,}476$ a $\gamma_1 = -1{,}401$[24]. Prvé podmienka splnená nie je, z čoho vyplýva, že nebudeme môcť získať „rozumné“ hodnoty sklonov k úsporám:

$$s_W = \gamma_0 = -0{,}476$$
$$s_P = \gamma_0 + \gamma_1 = -0{,}476 + 1{,}401 = 0{,}928$$

T a b u ľ k a 5

Kaldorov model: Výpočet funkcie úspor

	s	AWS	P/Y = 1 –AWS
1995	0,346	0,427	0,573
1998	0,294	0,457	0,543
2001	0,280	0,434	0,566
2004	0,317	0,420	0,580
2008	0,381	0,431	0,569

Údaje v mil. EUR

Zdroj: Štatistický úrad SR; Eurostat; vlastné výpočty

Vidíme, že implikovaná hodnota sklonu k úsporám z miezd je záporná! Ak predpokladáme, že Kaldorov model je správny a sklon k úsporám z miezd je v intervale od 0 po 1, je najrozumnejšie predpokladať, že skutočná hodnota sklonu k úsporám z miezd je $s_W = 0$.[25] Funkcia úspor bude mať teda tvar:

$$s = \frac{P}{Y}\left(s_P - s_W\right) + s_W = \frac{P}{Y}\left(s_P - 0\right) + 0 = s_P \frac{P}{Y}$$

Vykonáme regresnú analýzu *bez úrovňovej konštanty* a to v podobe:

$$s = \gamma \frac{P}{Y}$$

γ – sklon regresnej priamky

[24] Štandardná chyba parametru γ_0 je na úrovni 0,380; štandardná chyba parametru γ_1 je na 0,673.

[25] Za zmienku stojí, že predpoklad $s_W = 0$ je často používaným zjednodušujúcim predpokladom v keynesovských rastu z obdobia, kedy bol konštruovaný Kaldorov model.

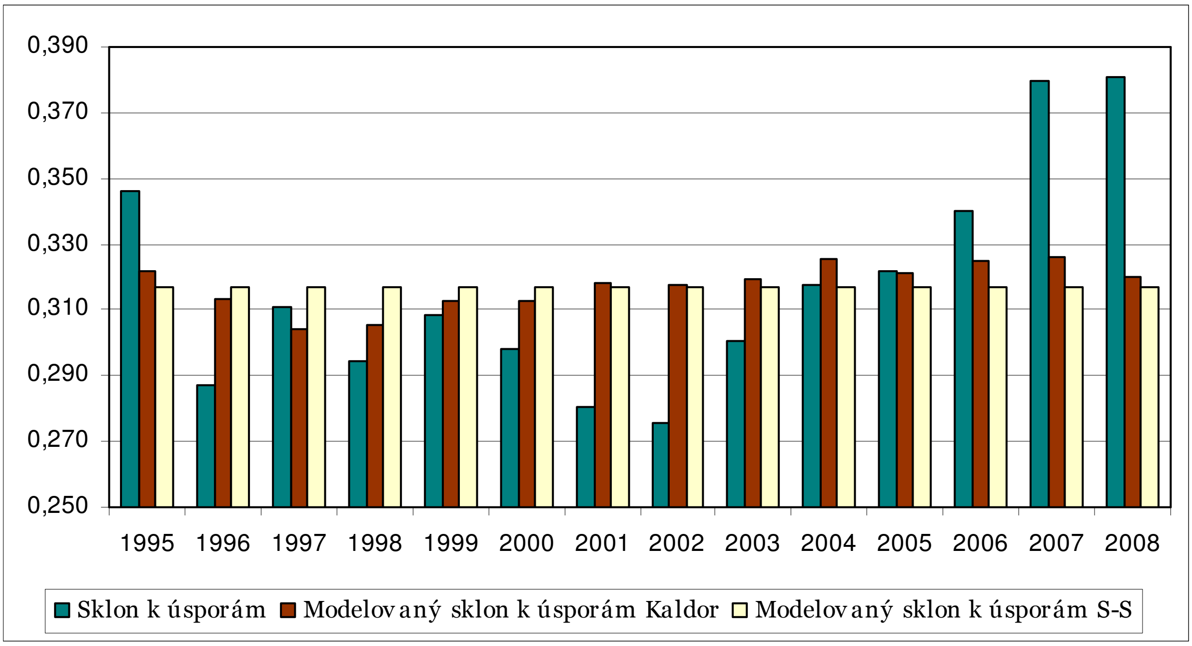
Predpokladáme $s_P = \gamma$. Odhadovaná hodnota parametra γ je $\gamma = 0{,}562$, čo implikuje sklon k úsporám zo ziskov $s_P = 0{,}562$ a sklon k úsporám z miezd $s_W = 0$.[26]

V graf 8 porovnáme skutočný sklon k úsporám, sklon k úsporám podľa Kaldorovej funkcie úspor a sklon k úsporám ako Solow-Swanovskú konštantu (upozorňujeme, že os y začína od hodnoty 0,250).

Aj v tomto prípade Kaldorov model lepšie opisuje vývoj ekonomiky SR, čo však už nie je natoľko samozrejmé, ako v prípade funkcie technologického pokroku. Hodnota NRMSE pre Kaldorovú funkciu úspor je NRMSE = 27,96%, pre Solow-Swanovskú konštantu NRMSE = 30,70%.

G r a f 8

Modelovanie sklonu k úsporám



Zdroj: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

Aj napriek metodologickej „zastaranosti“ predpokladu, že sklon k úsporám z miezd je nižší ako sklon k úsporám zo ziskov (nehovoriac už o predpoklade, že sklon k úsporám z miezd je nulový), tento predpoklad by nám pomohol pri modelovaní vývoja slovenskej ekonomiky. Mohli by sme napríklad nahradiť funkciu akumulácie v Solow-Swan modeli

[26] Štandardná chyba parametru γ je 0,014.

$$\dot{K} = s(1-\tau)F(K, AL) - NX - \delta K$$

funkciou

$$\dot{K} = s_P \frac{P}{Y}(1-\tau)F(K, AL) - NX - \delta K = s_P(1-AWS)(1-\tau)F(K, AL) - NX - \delta K \ .$$

Pre každý rok by sme použili skutočnú hodnotu *AWS* čo by *mohlo* znížiť chyby v modelovaní úspor a teda aj kapitálovej zásoby a produktu. Bolo by však náročné mikroekonomicky obhájiť odlišné hodnoty podielu ziskov na produkte v jednotlivých obdobiach. Podľa neoklasickej logiky Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie, podiel ziskov (resp. dôchodkov z kapitálu) v každom období musí byť α. Riešením by bolo predpokladať, že hodnota parametru α je v každom období odlišná. Udržateľnosť takéhoto predpokladu je však diskutabilná.

Aj napriek tomu však uvedieme, ako sa zmenia hodnoty NRMSE v Solow-Swan modeli, ak použijeme funkciu akumulácie v tvare:

$$\dot{K} = s_P(1-AWS)(1-\tau)F(K, AL) - NX - \delta K$$

Hodnoty parametra α každom roku ponecháme konštantné na úrovni α = 0,565.

- Pre hodnoty HDP NRMSE klesne z 4,06% na 3,91%.
- Pre hodnoty spotreby NRMSE klesne z 7,04% na 5,96%.
- Pre hodnoty kapitálovej zásoby NRMSE stúpne z 4,76% na 4,83%.
- Pre sklon k úsporám NRMSE klesne z 30,70% na 27,96%.
- Pre tempo rastu HDP NRMSE klesne z 19,66% na 19,31%.
- Pre tempo rastu kapitálovej zásoby NRMSE klesne z 25,56% na 24,82%.

Zhrňme, že takáto modifikácia Solow-Swan modelu by umožnila lepšie vysvetliť všetky hlavné agregáty okrem absolútnej veľkosti kapitálovej zásoby (kde je však nárast chyby iba minimálny).

2.3.3 Funkcia akumulácie kapitálu

Ako sme vysvetlili vyššie, keďže cieľom firiem je zabezpečiť konštantný pomer kapitálovej zásoby k produktu, za predpokladu, že firmy očakávajú nemenné tempo rastu produktu, rast kapitálovej zásoby v roku *t* je rovný rastu produktu v čase *t-1*.

$$\frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}} = \frac{Y_{t-1} - Y_{t-2}}{Y_{t-2}}$$

Grafické znázornenie takéhoto vývoja predstavuje obrázok 5.

Na základe skutočných údajov zostrojme graf. ktorý bude empirickým náprotivkom teoretického obrázku 5. Funkciu technologického pokroku sme odhadli v časti 2.3.1:

$$g_y = 0,308 + 0,0464 g_k$$

Do grafu nanášame pre každé obdobie skutočné dvojice hodnôt g_k a g_y.

Na grafe 9 vidíme, že skutočný vývoj Slovenskej republiky nezodpovedá teoretickému zobrazeniu na obrázku 5, čo je výsledkom troch vplyvov:

- Odhad funkcie technologického pokroku je štatisticky nevýznamný
- Časť investícií je financovaná zahraničnými zdrojmi. Inak povedané, čistý export je nenulový, čo znamená, že investície v domácej ekonomike sa nerovnajú domácim úsporám. Je otázne, či máme predpokladať, že zahraniční investori akumulujú kapitál s cieľom udržať pomer K/Y konštantný.
- Funkcia akumulácie kapitálu $(K_t - K_{t-1})/K_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})/Y_{t-2}$ sa na Slovensku neuplatňuje.

Na potvrdenie toho, že kapitál nie je akumulovaný podľa funkcie $(K_t - K_{t-1})/K_t = (Y_{t-1} - Y_{t-2})/Y_{t-1}$ postačí grafické zobrazenie na grafe 10.

Aby sme skonštruovali krivku „Vývoj 95-08“, nanášame na os x nanášame tempo rastu produktu per capita v čase *t-1* ($(Y_{t-1} - Y_{t-2})/Y_{t-2}$), na os y tempo rastu kapitálovej vybavenosti v čase t, t.j. $(K_t - K_{t-1})/K_{t-1}$.

Aby sme sa vyhli námietke č. 2 – zahraniční investori neakumulujú s cieľom $K/Y = \theta$, konštruujeme krivku „Vývoj 95-08 očistený o NX.“ Na os y nanášame také tempo rastu, aké by sme pozorovali ak by bol čistý export nulový, t.j. ak abstrahujeme od zahraničných investícií. V každom jednom období by bol kapitál rovný:

$$K_t' = K_{t-1} - SFK_{t-1} + S_{t-1}$$

K’ – kapitálová zásoba očistná o zahraničné investície

V skutočnosti ale platí $K_t = K_{t-1} - SFK_{t-1} + S_{t-1} - NX_{t-1}$. Vzťah medzi očistenou kapitálovou zásobou *K’* a skutočnou kapitálovou zásobou *K* je:

$$K_t' = K_t + NX_t$$

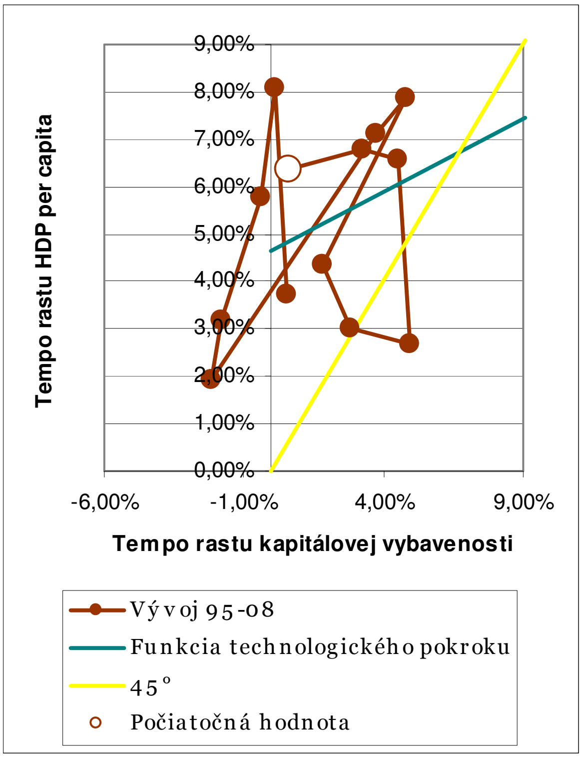
Následne vypočítame pre každé jedno obdobie hodnotu očistenej kapitálovej vybavenosti $k' = K'/L$ a tempá rastu očistenej kapitálovej vybavenosti $g_{k';t} = (k_t' - k_{t-1}')/k_{t-1}'$. Hodnoty $g_{k';t}$ nanášame na os y.

Ak by sa funkcia akumulácie uplatňovala, všetky body by sa mali nachádzať v blízkosti priamky vedenej pod uhlom 45 stupňov. Môžeme pozorovať, že to tak nie je ani v prípade krivky „Vývoj 95-08," ani v prípade krivky „Vývoj 95-08 očistený o NX."

Pripomeňme, že v pôvodnom Kaldorovom modeli vedie vyššia miera zisku k vyššiemu želanému pomeru $(K/Y)^*$, v našom zjednodušenom modeli sme však predpokladali konštantnú hodnotu $(K/Y)^* = \theta$. Uveďme iba, že ani použitie pôvodného Kaldorovho predpokladu pozitívneho vzťahu medzi P/K a $(K/Y)^*$ by nepomohlo vysvetliť akumuláciu kapitálu.

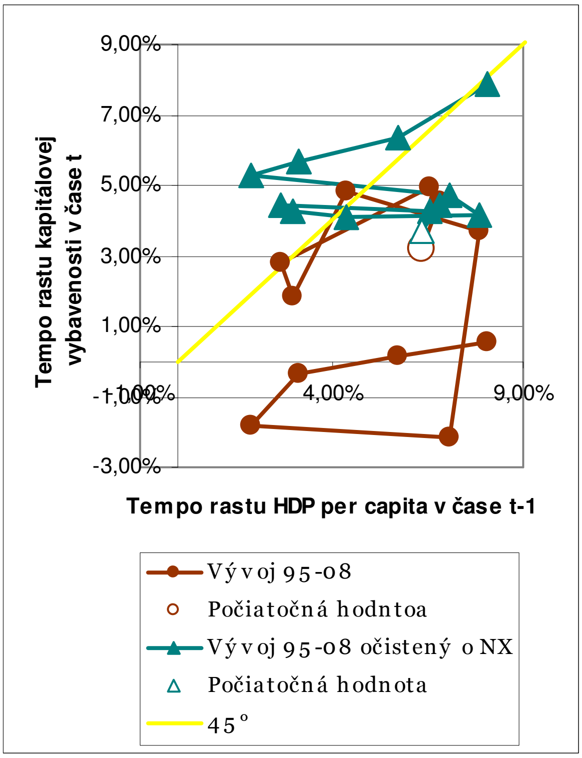
Graf 9

Vývoj Slovenskej republiky z pohľadu Kaldorovho modelu



Graf 10

Funkcia akumulácie kapitálu v Kaldorovom modeli



Zdroje oboch grafov: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

2.4 Kaldorov model – zhrnutie teoretických a praktických zistení

Kaldorov model a Solow-Swan model sa vyznačujú niekoľkými spoločnými znakmi.

1. Aj napriek tomu, že Kaldor odmieta vychádzať z predpokladu existencie produkčnej funkcie, Cobb-Douglasová produkčná funkcia implikuje rovnaký vzťah medzi tempom rastu kapitálovej vybavenosti a tempom rastu produktu, ako Kaldorová funkcia technologického pokroku.
2. Oba modely vychádzajú z predpokladu plnej zamestnanosti.
3. Ani jeden z modelov sa nesnaží mikroekonomicky vysvetliť hodnoty sklonu k úsporám – oba modely ich považujú za exogénne dané.
4. Modely predpovedajú, že v dlhom období ekonomiky konvergujú k stálemu stavu, v ktorom kapitálová vybavenosť aj produkt per capita rastú rovnakým tempom.
5. Dlhodobé tempo rastu nezávisí od sklonu k úsporám (na rozdiel od Harrod-Domar modelu).

Vzhľadom na to, že Kaldor zakladá svoj model na keynesovskej analýze a Solow-Swan model je typicky neoklasickým modelom, môžeme medzi modelmi pozorovať dôležité rozdiely:

1. Solow-Swan model predpokladá možnosť substitúcie práce a kapitálu, pomer K/Y je variabilný. Kaldor vychádza z predpokladu konštantného podielu K/Y.
2. Solow-Swan model predpokladá jednu hodnotu sklonu k úsporám. Kaldor predpokladá, že sklon k úsporám je vyšší zo ziskov ako z miezd.
3. V Solow-Swan modeli implicitne zabezpečuje plnú zamestnanosť pružná úroveň miezd. V Kaldorovom modeli sa dosahuje plná zamestnanosť na základe nutnej rovnosti úspor a investícií. Zmeny v cenovej hladine vedú k zmene podielu ziskov na produkte a následne k zmene sklonu k úsporám, čo zabezpečí rovnosť $S = I$.
4. V Solow-Swan modeli celkový dôchodok rozdeľuje na mzdy a zisky na základe parametru α. V Kaldorovom modeli určuje sumu miezd a ziskov nutnosť rovnosti $S = I$.

Kvôli väčšej voľnosti pri špecifikácii hodnôt parametrov funkcie technologického pokroku má Kaldorov model vyššiu „úspešnosť“ pri opisovaní produktu ako Cobb-Douglasová produkčná funkcia. Predpoklad rôznych sklonov k úsporám sa javí ako empiricky opodstatnený, aj keď vedie k nepravdepodobnej hodnote sklonu k úsporám z miezd $s_W = 0$. Aj napriek tomu, ak by sme použili v Solow-Swan modeli dva rôzne sklony k úsporám, dosiahli by sme zlepšenie výsledkov. Problémovým bodom Kaldorovho modelu v porovnaní s Solow-Swan modelom je jeho neschopnosť vysvetliť akumuláciu kapitálu.

3 Ramsey-Cass-Koopmans model ekonomického rastu

Ako sme už spomenuli vyššie, jedným zo slabých článkov Solow-Swan modelu je predpoklad konštantného sklonu k úsporám. Kaldorov model umožňuje variabilitu v pomere úspor k produktu, avšak o nič menej arbitrárnym spôsobom. Skutočne, prečo by mali domácnosti sporiť v každom období rovnakú časť dôchodku? Nemohli by si domácnosti zvýšiť svoju užitočnosť tým, že budú sporiť viac v období tranzitívnej dynamiky – teda v čase, keď sa ekonomika približuje stálemu stavu ako keď sa ekonomika už nachádza v stálom stave. Zdá sa, že je tomu tak. Uvedomme si, že úroková miera – cena kapitálu – je rovná hraničnému produktu kapitálu, ktorý je klesajúci – čím menej kapitálu, tým vyššia úroková miera. Ak predpokladáme, že ekonomika začína s kapitálovou zásobou menšou ako je stály stav, kapitálová zásoba bude v čase rásť a úroková miera bude klesať. Ak nižšia úroková miera motivuje k menším úsporám môžeme intuitívne predpokladať, že sklon k úsporám bude v čase klesať. Takto uvažoval vo svojom článku Robert M. Solow. Na druhej strane, môže to byť aj naopak: Ak domácnosti sporia „na niečo“ (snažia sa nasporiť konkrétnu sumu) pri vyššej úrokovej miere stačí sporiť menej[27]. V tom prípade by sklon k úsporám v čase rástol.

Je paradoxné, že riešenie tohto problému predchádzalo jeho „zadanie“ o takmer 30 rokov. V roku 1938 publikoval Frank Ramsey článok s názvom *A Mathematical Theory of Saving* kde podal riešenie tejto úlohy. Jeho práca ostala ekonomickou profesiou dlho nepovšimnutá, až v roku 1965 jeho prácu oživili David Cass (Cass, 1965) a Tjalling Koopmans (Koopmans, 1965). Neoklasický model s variabilnou úrokovou mierou je z tohto dôvodu známy ako Ramsey-Cass-Koopmans model alebo iba ako Ramsey model.

3.1 Filozofia Ramsey-Cass-Koopmans modelu

Základnou myšlienkou Ramsey-Cass-Koopmans modelu je, že domácnosti sporia toľko, aby maximalizovali súčasnú hodnotou užitočnosti získanej počas celého svojho života – t.j. sumu diskontovaných užitočností získaných počas celého svojho života.

Koľko užitočnosti získajú domácnosti zo spotreby *c* vyjadruje funkcia užitočnosti:

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \tag{3.1}$$

σ – koeficient relatívnej averzie k riziku

Je užitočné uvažovať o *c* ako o spotrebe jednej domácnosti, pričom počet domácnosti je e^{nt} ($c = C/e^{nt}$). Táto funkcia užitočnosti je známa ako funkcia s *konštantnou relatívnou averziou k riziku* CRRA (constant relative risk aversion).

[27] Spomenieme, že toto bola jedna z námietok Johna M. Keynesa proti neoklasickej analýze, kde sú úspory rastúcou funkciou úrokovej miery a investície klesajúcou funkciou úrokovej miery. Keynes, 1963

Pre koeficient relatívnej averzie k riziku σ platí, že je rovný zápornej hodnote podielu druhej a prvej derivácie funkcie užitočnosti[28]:

$$\sigma = -\frac{U''(c)}{U'(c)}$$

Užitočné je taktiež vedieť, že ako sa σ približuje 0, funkcia užitočnosti sa stáva lineárnou (domácnosti by boli neutrálne voči riziku) a ako sa σ približuje 1, funkcia užitočnosti sa stáva logaritmickou.[29]

Predpokladá sa, že domácnosti žijú nekonečne dlho.[30] Celková užitočnosť získaná počas nekonečne dlhého života je sumou diskontovaných užitočnosti v jednotlivých obdobiach (keďže domácnosti sú netrpezlivé, spotreba v budúcnosti je menej „užitočná" ako spotreba v súčasnosti – užitočnosť sa diskontuje). V prípade

---

[28] Prvá derivácia funkcie užitočnosti je kladná – s rastúcou spotrebou užitočnosť rastie. Druhá derivácia je záporná – s rastúcou spotrebou užitočnosť rastie čím ďalej tým pomalšie, prejavuje sa zákon klesajúcej hraničnej užitočnosti. Pomer druhej a prvej derivácie hovorí, „ako rýchlo" klesá dodatočná užitočnosť získaná z každej ďalšej jednotky spotreby. Čím rýchlejšie dodatočná užitočnosť klesá, tým *averznejšie* k riziku sú domácnosti. Prečo je tomu tak pomôže vysvetliť nasledujúci príklad:

Predstavme si že domácnosti ponúkneme na výber dve možnosti: (1) dostane s istotou 100 EUR a (2) s pravdepodobnosťou 50% dostane 101 EUR a s pravdepodobnosťou 50% dostane 99 EUR. Ak by bola domácnosť k riziku indiferentná, možnosti 1 a 2 by pre ňu boli rovnocenné. Ak je však domácnosť averzná k riziku, vyberie si možnosť 1. Ak sa totiž prejavuje klesajúca hraničná užitočnosť, funkcia užitočnosti môže vyzerať napr. takto: $U(99) = 1{,}8$; $U(100) = 2$; $U(101) = 2{,}05$. Dodatočné euro z 99 na 100 zvýšili užitočnosť o 0,2, ďalšie dodatočné euro iba o 0,05. (koeficient relatívnej averzie k riziku je približne $\sigma = (0{,}2 - 0{,}05)/0{,}125 = 1{,}2$; hodnota 0,125 je priemer 0,2 a 0,05).

V prípade možnosti 1 bude získaná užitočnosť na 100% $U(100) = 2$. V prípade možnosti 2 bude s 50% pravdepodobnosťou užitočnosť $U(99) = 1{,}8$ a s 50% pravdepodobnosťou $U(101) = 2{,}05$. Očakávaná užitočnosť bude teda $U = 0{,}5 \,.\, 1{,}8 + 0{,}5 \,.\, 2{,}05 = 1{,}925$ čo je menej ako 2. Domácnosti si zvolia možnosť č. 1 aj napriek tomu, že očakávaná výplata je v oboch prípadoch rovnaká ($100 = 0{,}5 \,.\, 99 + 0{,}5 \,.\, 101$) Hovoríme preto, že domácnosti sú averzné k riziku. Aby boli oba možnosti rovnocenné, museli by sme pri možnosti 2 oba sumy mierne zvýšiť. Očakávaná „výplata" by bola vyššia ako v prvom prípade ale očakávaná užitočnosť by bola rovnaká. Čím rýchlejšie klesá hraničná užitočnosť (čím je vyšší koeficient σ), tým viac je potrebné sumy zvýšiť.

Všimnime si taktiež, že ak by hraničná užitočnosť rástla (funkcia užitočnosti by nebola konkávna ale konvexná) domácnosti by boli náchylné k riziku. Keďže prvá aj druhá derivácia by boli kladné, koeficient relatívnej averzie k riziku by bol záporný.

[29] Použitím L'Hospitalovho pravidla: $\lim_{\sigma\to 1}\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} = \lim_{\sigma\to 1}\frac{d(c^{1-\sigma}-1)/d\sigma}{d(1-\sigma)/d\sigma} = \lim_{\sigma\to 1}\frac{-\ln(c)}{-1} = \ln(c)$

[30] Toto sa môže na prvý pohľad zdať ako neudržateľný predpoklad. Modely *prelínajúcich sa generácií* (overlapping generation models; OLG) opisujú ekonomiku so smrteľnými agentmi, ako však ukázal Robert J, Barro vo svojom článku *Are Government Bonds Net Wealth?* (Barro, 1974), v prípade, že konštruujeme model so smrteľnými agentmi, ktorých však zaujíma osud ďalších generácií (existujú tzv. *bequest motives)*, modely s nekonečne dlho žijúcimi agentmi a takéto OLG modely sú totožné.

diskrétneho času by sme zapísali funkciu užitočnosti $u=\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t}U\left(c_t\right)$, kde ρ je *vnútorná miera časovej preferencie.*

V spojitom čase namiesto sumy použijeme integrál[31]:

$$u=\int_0^{\infty}e^{\rho t}U\left(c\right)dt=\int_0^{\infty}e^{\rho t}\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}dt$$

Všimnime si, že do funkcie užitočnosti nevstupuje práce – domácnosti budú teda v každom období ponúkať maximálne množstvo práce $L=e^{nt}L(0)$.[32]

Zvyšok modelu je rovnaký, ako Solow-Swan model. Produkčná funkcia je Cobb-Douglasová $Y=AK^{\alpha}\left(e^{gt}L\right)^{1-\alpha}$ a funkcia akumulácie kapitálu je (keďže v uzatvorenej ekonomike sú úspory rovné investíciám):

$$\dot{K}=I-\delta K=S-\delta K=C-Y-\delta K$$

3.2 Riešenie Ramsey-Cass-Koopmans modelu

Model je možné riešiť dvoma spôsobmi:

1. Môžeme ho riešiť ako problém konkurenčnej trhovej rovnováhy. Vychádzali by sme z toho, že na trhu výrobných faktorov domácnosti ponúkajú firmám kapitál za cenu, ktorou je úroková miera a prácu za cenu, ktorou je mzda. Riešenie modelu vychádza z podmienok čistenia trhov – ceny výrobných musia byť také, aby sa ponúkané množstvo rovnalo dopytovanému. Takéto riešenie spočíva v riešení dvoch úloh: maximalizácie užitočnosti a maximalizácie zisku. Takémuto prístupu sa v tejto štúdii nebudeme venovať a čitateľa odkazujeme na publikácie Barro – Sala-i-Martin, 1995; Romer, 2006; Krueger, 2002 a Krueger, 2005.

2. Druhý prístup vychádza z nasledovnej myšlienky: Predstavme si, že existuje dokonale benevolentný diktátor – tzv. *sociálny plánovač* – jediným cieľom

---

[31] V anglickej literatúre sa pre funkciu užitočnosti $U\left(c\right)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ používa pojem *utility function* a pre súčet diskontovaných funkcií užitočnosti $u=\int_0^{\infty}e^{\rho t}U\left(c\right)dt$ pojem *felicity function.*

[32] Funkciu užitočnosti by sme mohli modifikovať na $U\left(c\right)=\left[\left(c^{1-\sigma}-1\right)/1-\sigma\right]-\eta\times l$ kde η je parameter (η>0) a l je množstvo práce poskytovanej jednou domácnosťou $l=L/e^{nt}$. Každá domácnosť by mohla poskytnúť maximálne l = *1* a minimálne l = *0* práce. V tomto prípade by bolo množstvo poskytnutej práce závisle od mzdy a museli by sme explicitne modelovať trh práce. Ak je mzda pružná, v každom období by sa dosahovala plná zamestnanosť a neexistovala by nedobrovoľná nezamestnanosť.

ktorého je maximalizovať užitočnosť domácnosti. Sociálny plánovať nadiktuje firmám, koľko a akých výrobných faktorov použiť, koľko čoho vyprodukovať a domácnostiam, koľko čoho spotrebovať a koľko usporiť. Keďže cieľom plánovača je maximalizovať užitočnosť, jeho riešenie bude pre domácnosti to najlepšie možné.

Dôležité je, že keďže v modeli nie sú prítomné žiadne trhové zlyhania (nie sú tam prítomné externality, verejné statky, asymetrické informácie ani monopolná sila) z prvej vety blahobytu vyplýva, že oba riešenia budú totožné. Dôkaz tohto faktu (pre model v diskrétnom čase) možno nájsť napr. v Krueger, 2005.

Cieľom plánovača je maximalizovať hodnotu funkcie

$$u = \int_0^\infty e^{\rho t} U(c) dt$$

pod obmedzeniami produkčnej funkcie

$$Y = AK^{\alpha} \left(e^{gt} L\right)^{1-\alpha}$$

a funkcie akumulácie kapitálu

$$\dot{K} = I - \delta K = S - \delta K = C - Y - \delta K \ .$$

Treťou obmedzujúcou podmienkou je podmienka transversality, ktorou sa nebudeme bližšie zaoberať.

Matematické riešenie tohto problému ponúkame v prílohe 2, spomeňme len, že táto úloha je problémom optimálneho riadenia a jej riešenie vychádza z Pontjagrinovho princípu maxima. Naznačme však spôsob riešenia pomocou Eulerovej rovnice.

Naznačme najprv veľmi jednoduché riešenie s logaritmickou funkciou užitočnosti (t.j. σ = 1) a v diskrétnom čase (funkcia užitočnosti je $u = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t \ln(c_t)$). Hraničná užitočnosť spotreby v čase t je určená:

$$MU_t = \frac{du}{dc_t} = \left[\frac{1}{1+\rho} \right]^t \frac{1}{c_t}$$

MU – hraničná užitočnosť

Ak domácnosť spotrebuje o jednu jednotku menej v čase t jej užitočnosť klesne o MU_t. Túto jednotku usporí pri úrokovej miere r, v čase $t+1$ bude teda disponovať $(1+r)$ jednotkami produktu. Ak ich spotrebuje, získa dodatočnú užitočnosť o veľkosti $(1+r)MU_{t+1}$. Ak však domácnosť alokovala optimálne, t.j. najlepšie možne, nemôže si takouto transakciou polepšiť, hraničná obeť MU_t musí byť teda rovná hraničnému „zisku“ $(1+r)MU_{t+1}$.

$$MU_t = (1+r)MU_t$$

$$\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t \frac{1}{c_t} = (1+r)\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t+1}\frac{1}{c_{t+1}}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1+r}{1+\rho}$$

$$1+\frac{\Delta c_t}{c_t} = \frac{1+r}{1+\rho}$$

$$\frac{\Delta c_t}{c_t} = \frac{1+r}{1+\rho} - 1$$

Hodnota zlomku $(1+r)/(1+\rho)$ je pre malé hodnoty r a ρ rovná približne $1+r-\rho$, môžeme preto zapísať:

$$\frac{\Delta c_t}{c_t} = r - \rho\,. \tag{3.2}$$

Rovnica (3.2) je známou rovnicou vyjadrujúcou ako tempo rastu spotreby závisí od úrokovej miery a parametrov funkcie užitočnosti. Ak je úroková miera r vyššia ako vnútorná miera časovej preferencie ρ, domácnosti budú svoju spotrebu v čase zvyšovať. Nie je totiž optimálne spotrebovať príliš veľa, ak je úroková miera dostatočne vysoká na to, aby dokázala kompenzovať naše čakanie na budúcu spotrebu. Na začiatku domácnosti spotrebujú menej a usporené čiastky spotrebúvajú v budúcnosti – spotreba v čase rastie. Ak je však úroková miera nižšia ako vnútorná miera časovej preferencie, nedokáže úrok pokryť ani obeť čakania, spotrebováva sa na začiatku viac spotreba v čase klesá.

Použime teraz Eulerovú rovnicu v spojitom čase a pre CRRA funkciu užitočnosti s ľubovoľnou hodnotou parametru σ. Odvoďme najprv predpis pre hraničnú užitočnosť v čase t. Prvá derivácia funkcie užitočnosti (3.1) podľa c je:

$$MU(t) = \frac{dU\left[c(t)\right]}{dc(t)} = \frac{d\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]}{dc(t)} = c(t)^{-\sigma} \tag{3.3}$$

Domácnosť môže v čase t znížiť svoju spotrebu o Δc, investovať danú čiastku pri úrokovej miere r a na krátke obdobie Δt a usporenú čiastku spolu s úrokom potom v čase $t+\Delta t$ spotrebovať. Ak v čase t domácnosť zníži spotrebu o Δc, užitočnosť klesne o $\Delta c MU(t)e^{-\rho t}$. Usporená čiastka spolu s úrokmi bude rovná $\Delta c e^{r\Delta t}$. Ak túto čiastku domácnosť spotrebuje v čase $t+\Delta t$, užitočnosť vzrastie o $\Delta c e^{r\Delta t}MU(t+\Delta t)e^{-\rho(t+\Delta t)}$. Ak domácnosť alokovala spotrebu optimálne, takúto transakciu nevykoná, to znamená, že náklady tejto transakcie (ušlá užitočnosť v čase *t*) $\Delta cMU(t)e^{-\rho t}$ musia byť rovné potenciálnemu výnosu (dodatočnej užitočnosti v čase $t+\Delta t$), t.j. $\Delta ce^{r\Delta t}MU(t+\Delta t)e^{-\rho(t+\Delta t)}$.

$$\Delta cMU(t)e^{-\rho t} = \Delta ce^{r\Delta t}MU(t+\Delta t)e^{-\rho(t+\Delta t)}$$

$$\Delta cc(t)^{-\sigma}e^{-\rho t} = \Delta ce^{r\Delta t}c(t+\Delta t)^{-\sigma}e^{-\rho(t+\Delta t)}$$

Keďže c rastie tempom $\dot{c}/c$ môžeme zapísať $c(t+\Delta t) = c(t)e^{\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t}$.

$$\Delta cc(t)^{-\sigma}e^{-\rho t} = \Delta ce^{r\Delta t}\left[c(t)e^{\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t}\right]^{-\sigma}e^{-\rho(t+\Delta t)}$$

$$\Delta cc(t)^{-\sigma}e^{-\rho t} = \Delta ce^{r\Delta t}c(t)^{-\sigma}e^{-\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t}e^{-\rho(t+\Delta t)}$$

Predeľme oba strany rovnice výrazom $\Delta cc(t)^{-\sigma}e^{-\rho t}$:

$$1 = e^{(r-\rho)\Delta t}e^{-\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t}$$

Zlogaritmujme daný výraz:

$$\ln 1 = \ln e^{(r-\rho)\Delta t} + \ln e^{-\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t}$$

$$0 = (r-\rho)\Delta t - \sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\Delta t = -\frac{1}{\sigma}(r-\rho)\Delta t$$

Predeľme obe strany Δt aby sme získali:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -\frac{1}{\sigma}(r-\rho) \tag{3.4}$$

Rovnica (3.4) vyjadrujúca tempo rastu spotreby (už nie približne, ako v diskrétnom čase) je veľmi podobná rovnici (3.2), s tým rozdielom, že parameter σ ovplyvňuje citlivosť spotreby na zmeny v úrokovej miere.

V našom modeli situáciu ešte komplikuje rast počtu obyvateľov a technologický pokrok. Rovnica (3.4) bude mať odlišnú podobu, a nebude vyjadrovať tempo rastu spotreby na jednu domácnosť (resp. per capita) ale tempo rastu spotreby na *jednotku efektívnej práce* χ.

$$\chi = \frac{C}{Le^{gt}} = \frac{c}{e^{gt}}$$

χ – spotreba na jednotku efektívnej pracovnej sily

Úrokovú mieru zároveň nahradíme hraničným produktom efektívnej kapitálovej vybavenosti κ. Tempo rastu spotreby na jednotku efektívnej práce je určené (pre podrobnosti pozri prílohu 2):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\chi}}{\chi} &= \frac{1}{\sigma}\left[f'(\kappa) - (\delta + n + g + \hat{\rho}) \right] \\ \hat{\rho} &= \rho - g(1-\sigma) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$\hat{\rho}$ - upravená miera časovej preferencie

V prípade, že sa jedná o logaritmickú funkciu užitočnosti (σ = 1) upravená miera časovej preferencie je rovná miere časovej preferencie.

Druhá dynamická rovnica systému je podobná ako v prípade Solow-Swan modelu, ide o rovnicu akumulácie

$$\dot{\kappa} = f(\kappa) - (\delta + n + g)\kappa - \chi . \tag{3.6}$$

Oproti rovnici akumulácie v Solow-Swan $\dot{\kappa} = sf(\kappa) - (\delta + n + g)\kappa$ modeli efektívne úspory *sf(κ)* nahradil členy *f(κ)-χ* (úspory sú rovné produkt mínus spotreba).

Po predelení oboch strán (X) členom κ, získame predpis pre tempo rastu efektívnej kapitálovej vybavenosti:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{f(\kappa)}{\kappa} - (\delta + n + g) - \frac{\chi}{\kappa} \tag{3.7}$$

Ak použijeme Cobb-Douglasovú produkčnú funkciu, diferenciálne rovnice (3.6) a (3.7) získajú nasledovnú podobu:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = A\kappa^{\alpha-1} - (\delta + n + g) - \frac{\chi}{\kappa} \tag{3.8}$$

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{1}{\sigma}\left[A\alpha\kappa^{\alpha-1} - (\delta + n + g + \hat{\rho}) \right] \tag{3.9}$$

Systém je v stálom stave, ak sú oba premenné κ a χ konštantné, platí teda:

$$0 = A\kappa^{*(\alpha-1)} - (\delta + n + g) - \frac{\chi^*}{\kappa^*}$$

$$0=\frac{1}{\sigma}\left[A\alpha\kappa^{*(\alpha-1)}-\left(\delta+n+g+\hat{\rho}\right)\right]$$

Po úpravách získavame zlatej pravidlo akumulácie kapitálu v Ramsey-Cass-Koopmans modeli:

$$\kappa^{*}=\left(\frac{\alpha A}{\delta+n+g+\hat{\rho}}\right)^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \tag{3.10}$$

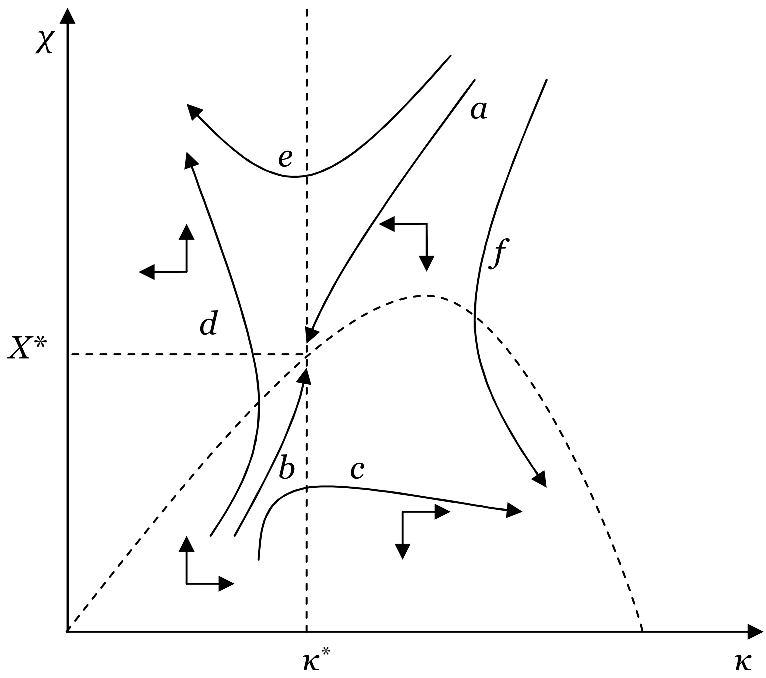
$$\chi^{*}=A\kappa^{*(\alpha-1)}-\left(\delta+n+g\right)\kappa^{*}. \tag{3.11}$$

Pre analýzu tohto problému je užitočné použiť tzv. fázový portrét, ktorý krivky definované rovnicami (X) a (X) rozdeľujú do štyroch kvadrantov.

Šípky vo fázovom diagrame znázorňujú, ako sa v jednotlivých kvadrantoch vyvíja kombinácia efektívnej spotreby a efektívnej kapitálovej vybavenosti pre každú začiatočnú kombináciu.

O b r á z o k 6

Ramsey-Cass-Koopmans model: Fázový portrét



Zdroj: Spracované podľa Barro, Sala-i-Martin, 1995

Ak je efektívna kapitálová vybavenosť menšia ako κ^*, z rovnice (3.9) vyplýva, že spotreba na jednotku efektívnej práce χ bude rásť a naopak. Ak je spotreba na jednotku efektívnej práce χ menšia ako χ^* definované rovnicou (3.10), efektívna kapitálová vybavenosť bude rastie a naopak.

Vidíme, že existuje šesť rôznych typov „ciest," avšak iba cesty *b* a *a* vedú k stálemu stavu – hovoríme o tzv. *stabilných vetvách* resp. *vyvážených rastových trajektóriách* (balanced growth path). Môžeme taktiež ukázať, že cesty *d*, *e*, *f* a *g* nemôžu byť optimálne, keďže ekonomika dosiahne v *konečnom čase* buď zápornú efektívnu spotrebu alebo zápornú hodnotu efektívnej kapitálovej vybavenosti.

Ekonomika sa vyvíja tak, že pre každú začiatočnú úroveň efektívnej kapitálovej vybavenosti sa určí (buď na konkurenčnom trhu alebo rozhodnutím sociálneho plánovača – tieto rozhodnutia sú samozrejme totožné) taká výška efektívnej spotreby[33], ktorá zabezpečí, že ekonomika smeruje k stálemu stavu. Ďalej sa hospodárstvo vyvíja podľa dynamických rovníc. Keď sa ekonomika dostane do stáleho stavu, efektívna kapitálová vybavenosť ako aj spotreba na jednotku efektívnej práce zostavajú konštantné. Spotreba, produkt ako aj kapitál per capita však budú rásť tempom technologického pokroku. *Táto a iba táto* cesta maximalizuje užitočnosť domácnosti.[34]

Ako vidíme, v dlhom období sa Ramsey-Cass-Koopmans model správa rovnako ako Solow-Swan model a preto sú aj jeho predpovede ohľadom konvergencie rovnaké. Hlavný prínos Ramsey-Cass-Koopmans modelu však spočíva v položení mikroekonomických základov Solow-Swan modelu.

Aj napriek relatívnej jednoduchosti modelu je komplikované určiť pre konkrétnu hodnotu efektívnej kapitálovej vybavenosti v čase $t=0$ takú hodnotu spotreby na jednotku efektívnej práce, aby ekonomika dokonvergovala ku stálemu stavu. Z tohto dôvodu je bežnou praxou Ramsey-Cass-Koopmans model *log-linearizovať*[35]. Myšlienka log-linearizácie je jednoduchá: namiesto premenných χ a κ vyjadríme systém v percentuálnych odchýlkach týchto premenných od ich hodnôt v stálom stave, t.j. $\tilde{\chi}=(\chi-\chi^*)/\chi^*$ a $\tilde{\kappa}=(\kappa-\kappa^*)/\kappa^*$. Predpokladáme ďalej, že zmena $\tilde{\chi}$ a $\tilde{\kappa}$ v čase je *lineárnou* funkciou hodnôt $\tilde{\chi}$ a $\tilde{\kappa}$, t.j.:

---

33 Pre logaritmickú funkciu užitočnosti (teda $\sigma = 1$) platí, že sklon k spotrebe z *bohatstva* v čase $t = 0$ (t.j. zo súčtu hodnoty aktív a všetkých budúcich diskontovaných miezd) v čase $t = 0$ je rovný súčtu vnútornej miery časovej preferencie a miery rastu pracovných síl $\rho - n$. (Barro – Sala-i-Martin 1995).

34 Všimnime si ešte jeden metodologický bod: Domácnosti skúmajú vplyv svojich rozhodnutí na užitočnosť vo všetkých budúcich obdobiach, analyzujú ako to, že dnes usporia jednu jednotku produktu ovplyvní budúcu užitočnosť zo spotreby. Konajú na základe racionálnych očakávaní. Porovnajme to s Kaldorovým modelom, kde firmy očakávali vždy konštantné tempo ekonomického rastu.

35 Podrobne o spôsobe log-linearizácie Ramsey-Cass-Koopmans modelu Barro – Sala-i-Martin, 1995; Romer 2006; Krueger 2005.

$$\frac{d\tilde{\kappa}}{dt} = q_1\tilde{\kappa} + q_2\tilde{\chi}$$

$$\frac{d\tilde{\chi}}{dt} = q_3\tilde{\kappa} + q_4\tilde{\chi}$$

$q_{1,2,3,4}$ – parametre

Z takejto aproximácie zároveň vypláva, že na stabilnej vetve (trajektórie *a* a *b* na obrázku 6) je pomer $\tilde{\chi}/\tilde{\kappa}$ *konštantný*.

$$\frac{\tilde{\chi}}{\tilde{\kappa}} = \frac{\dfrac{\chi - \chi^*}{\chi^*}}{\dfrac{\kappa - \kappa^*}{\kappa^*}} = \psi$$

ψ - konštanta

Hodnotu konštanty ψ je možné vypočítať z parametrov modelu. Práve na základe tejto logiky budeme kalibrovať Ramsey-Cass-Koopmans model pre Slovenskú republiku, hodnotu ψ však odhadneme ekonometricky.

3.3 Modifikácie modelu

Podobne ako Solow-Swan model, aj Ramsey-Cass-Koopmans model musíme modifikovať z dôvodu existencie verejného sektora a otvorenosti ekonomiky. Funkcia akumulácie kapitálu nadobúda podobu:

$$\dot{K} = (1-\tau)F(K, AL) - C - NX - \delta K$$

Táto modifikácia by si vyžiadala aj zmenu dynamických rovníc, budeme však nekonzistentne predpokladať, že dynamické rovnice systému ostanú nezmenené. Ich konkrétna modifikácia veľmi silne závisí od toho, aké predpoklady urobme ohľadom očakávaní a informácií domácnosti o zahraničnom obchode a verejnom sektore. Nezmení sa teda ani spôsob výpočtu hodnôt χ a κ v stálom stave a bude platiť rovnica $\tilde{\chi}/\tilde{\kappa} = \left[(\chi - \chi^*)/\chi^*\right] / \left[(\kappa - \kappa^*)/\kappa^*\right] = \psi$.[36]

3.4 Kalibrácia

Hodnoty parametrov kalibrujeme rovnako ako v prípade Solow-Swan modelu:

[36] O rozšírení Ramsey-Cass-Koopmans modelu o zahraničný a verejný sektor pozri Barro – Sala-i-Martin, 1995 a Romer, 2006.

$$A = 0,825$$
$$\alpha = 0,565$$
$$g = 0,0875$$
$$\delta = 0,0391$$

Problematický je najmä odhad koeficientov funkcie užitočnosti. Hodnotu koeficientu relatívnej averzie k riziku zvolíme *ad hoc* σ = 1, predpokladáme teda logaritmickú užitočnosť.[37] Hodnotu koeficientu vnútornej časovej preferencie sme zvolili taktiež *ad hoc* ρ = 0,06. Táto hodnota je o niečo vyššia, ako bežne používané hodnoty 0,03-0,04, takto kalibrovaný Ramsey-Cass-Koopmans model však dokáže lepšie opísať vývoj Slovenskej republiky.[38] Keďže predpokladáme logaritmickú užitočnosť, upravená miera časovej preferencie $\hat{\rho}$ je taktiež rovná $\hat{\rho}$ = 0,06.

Potrebné je odhadnúť hodnotu parametra ψ, ktorý určuje pomer medzi percentuálnou vzdialenosťou premennej χ od jej stáleho stavu a percentuálnou vzdialenosťou κ od stáleho stavu.

Pre jednotlivé roky vypočítame rovnako ako pri Solow-Swan modeli hodnoty κ. Analogicky vypočítame hodnoty χ. Pre rok 1995 (*t* = 0) napr. platí:

$$\chi_0 = \frac{C}{L_0 e^{g\times 0}} = \frac{13357}{3957\times e^{0,0875\times 0}} = 3,38$$

Vypočítame hodnoty dynamických premenných v stálom stave:

$$\kappa^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n + g + \hat{\rho}}\right)^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left(\frac{0,565\times 0,825}{0,0391+0+0,0875+0,06}\right)^{\left(\frac{1}{1-0,565}\right)} = 8,189$$

$$\chi^* = A\kappa^{*(\alpha-1)} - (\delta + n + g)\kappa^* = 0,825\times 8,189^{0,565-1} - (0,0391+0+0,875)\times 8,189 = 1,668$$

Všimnime si, že aj napriek veľkej podobnosti Solow-Swan modelu a Ramsey-Cass-Koopmans modelu sa vypočítaná hodnota efektívna kapitálovej zásoby výrazne líši (pri Solow-Swan modeli κ^* = 3,133). Nemálo sa však pod to podpisuje fakt, že do dynamických rovníc Ramsey-Cass-Koopmans modeli sme nezahrnuli verejný sektor.

Následne vypočítame odchýlky $\tilde{\chi} = (\chi - \chi^*)/\chi^*$ a $\tilde{\kappa} = (\kappa - \kappa^*)/\kappa^*$. Uveďme príklad pre rok 1995 (*t* = 0):

$$\tilde{\chi}_0 = \frac{\chi_0 - \chi^*}{\chi^*} = \frac{3,38-1,668}{1,668} = 1,02$$

---

[37] Predpoklad logaritmickej užitočnosti je často používaným zjednodušujúcim predpokladom v ekonomických modeloch.

[38] O spôsobe kalibrácie Ramsey-Cass-Koopmans modelu bližšie v Krueger, 2005

$$\tilde{\kappa}_0 = \frac{\kappa_0 - \kappa^*}{\kappa^*} = \frac{39,89 - 8,189}{8,189} = 3,87$$

Hodnoty efektívnej kapitálovej vybavenosti, spotreby na jednotku efektívnej práce ako aj ich odchýlky od stáleho stavu pre vybrané roky možno nájsť v tabuľke 6.

Nakoniec vykonáme regresnú analýzu *bez úrovňovej konštanty* v podobe:

$$\tilde{\chi} = \psi \tilde{\kappa}$$

Odhadovanou hodnotou je ψ = *0,306*[39].

T a b u ľ k a 6

Ramsey-Cass-Koopmans: Analýza konvergencie k stálemu stavu

	κ	χ	(κ – κ*)/ κ	(χ – χ*)/ χ
1995	39,89	3,38	3,87	1,02
1998	33,29	3,39	3,07	1,03
2001	28,14	2,96	2,44	0,78
2004	23,01	2,61	1,81	0,56
2008	15,97	2,12	0,95	0,27

Zdroj: Vlastné výpočty podľa údajov Eurostatu a ŠÚ SR

3.5 Simulácia

Spôsob simulácie modelu je podobný simulácii Solow-Swan modelu, odlišný je ale spôsob výpočtu úspor v jednotlivých obdobiach. Postupujeme nasledovne:

1. Na základe produkčnej funkcie vypočítame produkt v roku 1995 ($t = 0$)

$$Y_0 = 0,825 K_0^{0,565} \left(e^{0,0875\times 0} L_0\right)^{0,435} = 0,825 \times 157813^{0,565} \times \left(e^{0,0875\times 0} \times 3957\right) = 26170$$

2. Vypočítame efektívnu kapitálovú vybavenosť v čase t = 0

$$\kappa_0 = \frac{K_0}{e^{0,0875\times 0} L_0} = \frac{157813}{e^{0,0875\times 0} \times 3957} = 39,89$$

3. Vypočítame odchýlku efektívnej kapitálovej vybavenosti od stáleho stavu v čase t =0.

[39] Štandardná chyba parametru ψ je na úrovni 0,0065.

$$\tilde{\kappa}_0 = \frac{\kappa_0 - \kappa^*}{\kappa^*} = \frac{39,89 - 8,189}{8,189} = 3,87$$

4. Vypočítame modelovanú odchýlku spotreby na jednotku efektívnej práce od stáleho stavu:

$$\tilde{\chi} = \psi\tilde{\kappa} = 0,306 \times 3,87 = 1,19$$

5. Vypočítame konkrétnu hodnotu spotreby na jednotku efektívnej práce. Keďže $\tilde{\chi} = (\chi - \chi^*)/\chi^*$, tak platí:

$$\chi = \chi^*(1+\tilde{\chi})^* = 1,668 \times (1+1,185) = 3,65$$

6. Vypočítame spotrebu v roku *t* = 0.

$$C_0 = \chi L_0 e^{0,0875\times 0} = 3,65 \times 3957 \times e^{0,0875\times 0} = 14422$$

7. Vypočítame kapitál v nasledujúcom období - roku 1996 ($t = 1$)

$$K_1 = K_0 - 0,0391K_0 + (1-\tau_t)Y_0 - C_0 - NX_0 =$$
$$= 157813 - 0,0391 \times 157813 + (1-0,220)26170 - 14422 - 567 = 157059$$

8. Vypočítame produkt v roku 1996 ($t = 1$)

9. Vypočítame efektívnu kapitálovú vybavenosť v roku 1996 ($t = 1$)

Atď.

Úspešnosť modelovania slovenskej ekonomiky Ramsey-Cass-Koopmans modelom ilustrujú graf 11 a 12. Hlavnými zdrojmi chyby sú rovnako ako v prípade Solow-Swan modelu nesprávnosť predpokladu konštantnej miery opotrebenia a nedokonalé modelovanie sklonu k úsporám. Ako Ramsey-Cass-Koopmans model modeluje sklon k úsporám z disponibilného dôchodku (pre každé obdobie vypočítaný rovnako, ako zo štatistických údajov, t.j. $s = 1 - \left[C/(Y-G)\right] = 1 - C/(1-\tau)Y$) možno pozorovať na grafe 13. Graf 14 porovnáva skutočný vývoj kapitálovej zásoby s modelovaným vývojom.

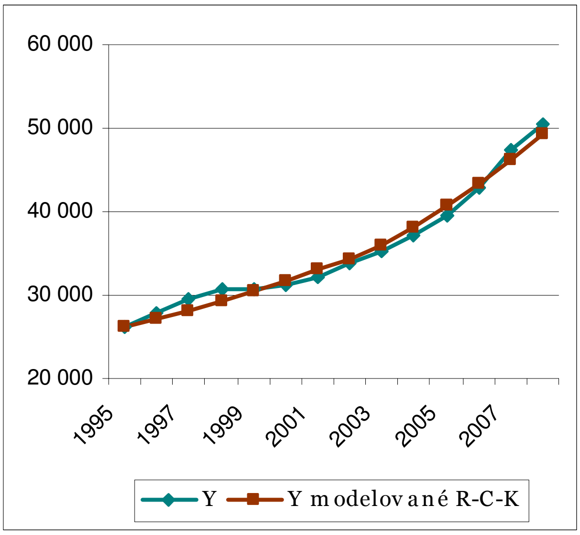
Zaujímavé je porovnať hodnoty NRMSE chýb v Solow-Swan modeli a Ramsey-Cass-Koopmans modeli:

- Pri modelovaní produktu je chyba NRMSE = 3,74% nižšia ako v Solow-Swan modeli (4,06%) čo je znakom, že endogenizácia sklonu môže priniesť pozitívne výsledky.

- Vylepšenie zhody modelovaného a skutočného produktu sa prejavuje aj na lepšom zachytení tempa rastu HDP, keďže NRMSE pre tempá rastu klesla na NRMSE = 19,51% v porovnaní s Solow-Swan modelom (19,66%).

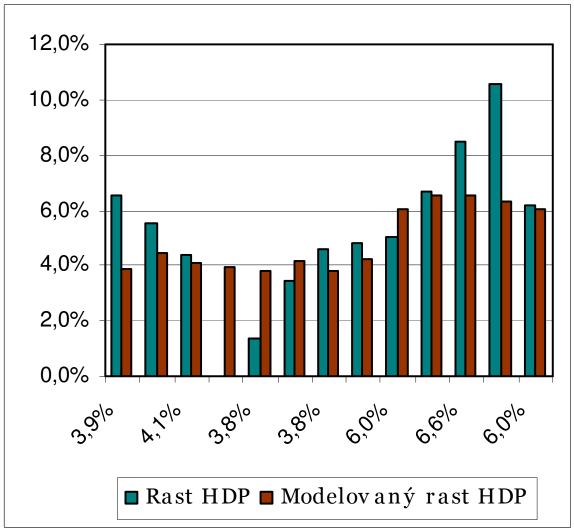
Graf 11

R-C-K model: Produkt



Graf 12

R-C-K model: Tempá rastu

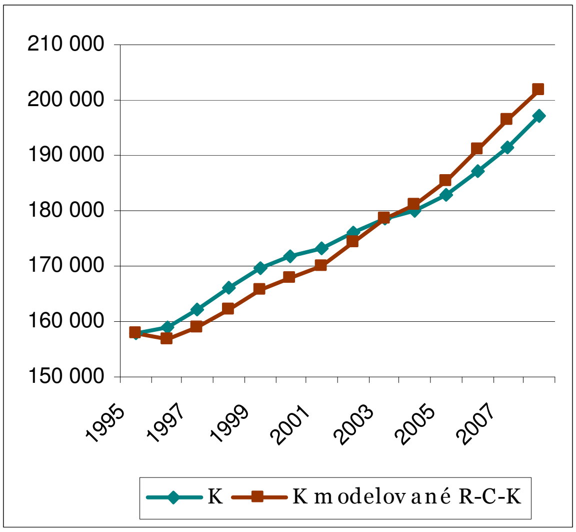


Zdroje oboch grafov: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

- Vypočítali sme takisto NRMSE pre spotrebu. V Ramsey-Cass-Koopmans modeli je NRMSE = 4,38% nižšia ako v Solow-Swan modeli (7,04%)

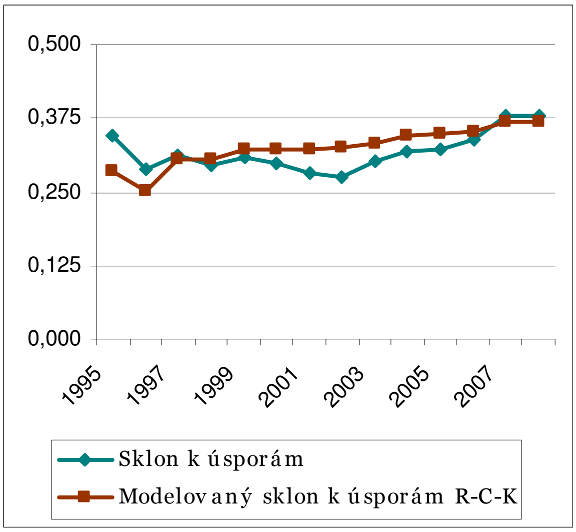
Graf 13

R-C-K model: Kapitál



Graf 14

R-C-K model: Sklon k úsporám



Zdroje oboch grafov: Vlastné výpočty podľa údajov ŠR SR a Eurostatu

- Ramsey-Cass-Koopmans model je menej úspešný pri predpovedaní kapitálovej zásoby, NRMSE = 6,83% (Solow-Swan: 4,76%)

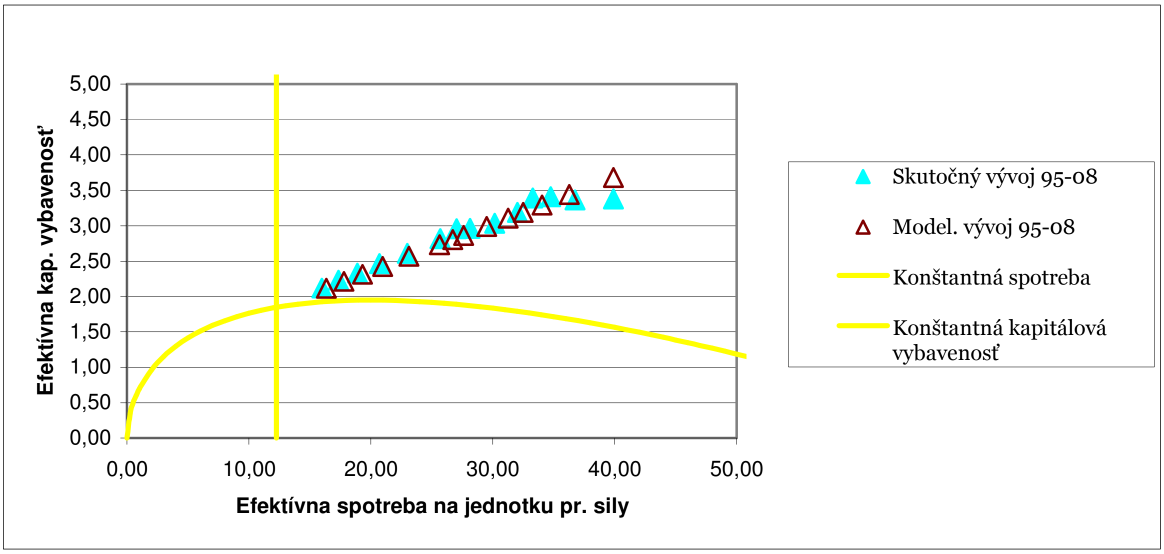
- Podstatou vylepšenia Ramsey-Cass-Koopmans modelom je lepšie modelovanie sklonu k úsporám, čo sa prejavilo poklesom chyby na NRMSE = 26,96% oproti Solow-Swan modelu, kde NRMSE = 30,70%. Podotýkame, že ide o polepšenie aj oproti Kaldorovmu modelu, kde NRMSE = 27,96%. Môžeme teda skonštatovať, že endogenizácia sklonu k úsporám bola úspešná.

3.6 Analýza

Zakončíme prezentáciu Ramsey-Cass-Koopmans modelu skonštruovaním fázového portrétu. Graf 15 je empirickým náprotivkom teoretického obrázku 6. Pri jeho konštruovaní sme postupovali rovnako ako v pri konštruovaní empirických grafov v Solow-Swan modeli.

Graf 15

Ramsey-Cass-Koopmans model: Fázový portrét



Zdroj: Vlastné výpočty podľa údajov Eurostatu a ŠÚ SR

Opäť vidíme, že ekonomika Slovenska sa približuje stálemu stavu *sprava*. Dôvody sú, samozrejme, rovnaké ako pri Solow-Swan modeli. Sú nimi najmä privysoká hodnota tempa práce násobiaceho technologického pokroku g = 8,75% a možnosť nadhodnotenia odhadu kapitálovej zásoby v roku 1999.

Záver

Robert E. Lucas píše vo svojom článku *On the Mechanics of Economic Development* publikovanom viac než 30 rokov potom, čo svoje modely konštruovali Solow a Kaldor (Lucas, 1988): *„Dávam prednosť používaniu pojmu 'teória' vo veľmi úzkom zmysle slova, t.j. odkazujúcom na explicitný dynamický systém, niečo, čo môže byť zadané do počítača a* pustené. *To je to, čo rozumiem pod 'mechanikou' ekonomického rozvoja – konštrukcia mechanického, umelého sveta, obývaného robotmi, ktorí prichádzajú do vzájomných kontaktov, ktorých ekonómia zvyčajne študuje, a ktorý je schopný vykazovať také správanie hrubých čŕt, ktoré sa podobajú na skutočný svet...“* Niečo podobné, ako opisuje Lucas, sme vykonali v našej štúdii my.

Naplnili sme svet „robotmi“ správajúcimi sa podľa pravidiel, ktoré vytvorili Robert M. Solow a Trevor W. Swan, Nicolas Kaldor, Frank Ramsey, Tjalling C. Koopmans a David Cass. Solow-Swan model opísal správanie sa ekonomiky s relatívne vysokou úspešnosťou, chyby, ku ktorým pri modelovaní dochádzalo pochádzali najmä z predpokladu konštantnej miery opotrebenia, ktorú na Slovensku nepozorujeme a nedokonalého modelovania sklonu k úsporám, ktorý je v Solow-Swan modeli konštantný. Kaldorov model poskytuje v tomto zaujímavú inšpiráciu – použitie dvoch rozličných sklonov k úsporám, pričom sklon k úsporám zo ziskov je vyšší ak sklon k úsporám z miezd. Aj napriek tomu, že zabudovanie tohto predpokladu do Solow-Swan modelu je problematické, naznačili sme, že výsledky by sa mohli týmto spôsobom vylepšiť. Ukázalo sa však ako problematické použiť samotný Kaldorov model na analýzu vývoja ekonomiky SR. Vylepšenie zhody modelovaných a skutočných hodnôt priniesla endogenizácia sklonu k úsporám v Ramsey-Cass-Koopmans modeli.

Endogenizácia technologického pokroku by bola ďalším spôsobom, ako vylepšiť modelovanie ekonomiky SR. S endogénnym technologickým pokrokom sa však pred nami otvára široký priestor teórií endogénneho rastu, ktoré už nie sú predmetom tejto štúdie.

Literatúra

Aghion, Phillipe – Howitt, Peter (1992). A Model of Growth through Creative Destruction. Econometrica, 60, 2 (March), 323–351.

Barro Robert J. – Sala-i-Martin Xavier (1995): *Economic Growth. 2. vydanie.* New York: McGraw-Hill

Barro, Robert J. (1974): *Are Government Bonds Net Wealth?* Journal of Political Economy, 81, 6 (December), 1095-1117.

Cass, David (1965): *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation.* Review of Economic Studies, 32 (July), 233-240.

Čaplánová, Anetta – Lisý, Ján – Petričová, Jarmila (1999): *Dejiny ekonomických teórii.* Bratislava: Elita

Felipe Jesus, Franklin Fischer M. (2001): *Aggregation in Production Functions: What Applied Economists Should Know.* Atlanta: Georgia Institute of Technology. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology. Dostupné na internete: http://are.berkeley.edu/courses/ARE241/fall2005/Felipe.pdf

Domar, Evsey D. (1946): *Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment.* Econometrica, 14 (April), 137-147.

Harrod, Roy (1939): *En Essay in Dynamic Theory.* Economic Journal, 49 (June), 14-33.

Harrod, Roy (1942): *Toward a Dynamic Economics: Some Recent Developments of Economic Theory and their Application to Policy,* London: Macmillan.

Hontyová, Kajetána (2005): *Štátny rozpočet, mena a medzinárodné vzťahy. 2. vydanie.* Bratislava: Iura Edition

Kaldor, Nicolas (1995-1956): *Alternative Theories of Distribution.* The Review of Economic Studies, Vol. 23, No. 2 (1955-1996), 83-100.

Kaldor, Nicolas (1957): *A Model of Economic Growth.* The Economic Journal, Vol. 67, No 268 (December), 591-624.

Kaldor, Nicolas (1962): *A New Model of Economic Growth.* The Riview of Economic Studies, Vol. 29, No. 3 (Juny), 174-192.

Kaldor, Nicolas (1963): *Capital Accumulation and Economic Growth.* In Friedtich A. Lutz and Douglas C. Hague, eds., *Proceedings of a Conference Held by the International economics Association,* London, Macmillan.

Keynes, John M. (1963): *Obecná teorie zaměstnanosti, úroku a peněz.* Praha: Nakladatelství Československé akademie věd.

Koopmans, Tjalling C. (1965): *On the Concept of Optimal Economic Growth*. Econometric Quarterly Journal of Economics, 108, 3 (August), 681-716.

Krueger, Dirk (2002): *Macroeconomic Theory*. Standford: Standford University.. Dostupné na internete: http://www.unc.edu/~gkara/710_fall09/Krueger.pdf; 15. februára 2009

Krueger, Dirk (2005): *Quantitative Macroeconomics – An Introduction*. Johann Wolfgang Goethe-University Frankfurt am Main. Frankfurt am Main. Dostupné na internete: www.wiwi.uni-frankfurt.de/profs/krueger/teaching/QuantMacro.pdf; 15. februára 2009

Muchová, Eva (2005): *Makroekonómia otvorenej ekonomiky*. Bratislava: Iura Edition.

Lábaj, Martin (2009): *Ekonomický rast a rovnováha*. Bratislava: Ekonóm.

Lucas, Robert E., Jr. (1988): *On the Mechanics of Economic Development*. Journal of Monetary Economics, 22, 1 (July), 3–42.

Lisý, Ján (2005): *Výkonnosť ekonomiky a ekonomický rast*. Bratslava: Iura Edition

Mankiw Gregory N., Romer David, Weil David N.. (1992): A Contribution to the Empirics of Economic Growth. Quarterly journal of Economics, 107 (May), 407-437.

Ramsey, F. (1928): *A Mathematical Theory of Saving*. Economic Journal, 38 (December), 543-559.

Romer, David (2006): *Advanced Macroeconomics. 3. vydanie*. New York: McGraw-Hill

Romer, Paul (1990): *Endogenous Technological Change*. Journal of Political economy, 98 (October, Part 2): 71-102.

Solow, Robert M. (1956): *A Contribution to the Theory of Economic Growth*. Quarterly Journal of Economics, 70, 1 (February), 65-94.

Swan, Trevor W. (1956): *Economic Growth and Capital Accumulation*. Economic Record, 32 (November), 334-361.

Príloha 1: Prvé pokusy o modelovanie ekonomického rastu: Harrod-Domar model

Nasledujúci výklad sleduje publikáciu Čaplánová-Lisý-Petričová, 1999 a Lisý, 2005.

Harrodov model

Harrod vychádza z predpokladu, že pomer kapitálovej zásoby a produktu je konštantný:

$$\frac{K}{Y} = \theta$$

Môžeme teda zapísať

$$K_t = \theta Y_t$$
$$K_{t-1} = \theta Y_{t-1}$$

z čoho vyplýva rovnica akcelerátora (keďže $I = \Delta K = K_t - K_{t-1}$), na ktorej je založený Harrodov model:

$$K_t - K_{t-1} = \theta\left(Y_t - Y_{t-1}\right)$$
$$I = \theta \Delta Y$$

Druhou východzou rovnicou je rovnica úspor založená na myšlienke, že sklon k úsporám je konštantný:

$$S = sY$$

Treťou Harrodovou rovnicou je rovnosť úspor a investícií:

$$S = I$$

Keďže prvá rovnica akcelerátora definuje veľkosť investícií a druhá rovnica definuje veľkosť úspor, získavame

$$c\Delta Y = sY$$

z čoho vypláva

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{s}{\theta}$$

keďže $I = S = sY$, investície rastú rovnakým tempom ako produkt, pričom ich tempo je rovné podielu sklonu k úsporám a kapitalového koeficientu. Tempo rastu ekonomiky definované podielom s/θ Harrod označil ako *zaručená miera rastu*.

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{s}{\theta}$$

Z rovnice akcelerátora $I = \theta \Delta Y$ vyplýva:

$$\frac{I}{Y} = \theta \frac{\Delta Y}{Y} = \theta g_Y$$

Domarov model

Domar vychádza z nutnosti rovnosti agregátneho dopytu a agregátnej ponuky:

$$AS = AD = Y$$

Domarová analýza vychádza z princípu multiplikátora:

$$\Delta AD = \frac{1}{s} \Delta I$$

Druhou dôležitou rovnicou je predpis pre úroveň agregátnej ponuky

$$\Delta AS = cI$$

kde *c* je konštanta. Rast agregátnej ponuky je proporcionálny investíciám (keďže táto funkcia *de facto* zodpovedá rovnici akcelerátora, je ju možno odvodiť rovnakým spôsobom).

Ak dáme agregátnu ponuku a agregátny dopyt do rovnosti

$$AS = AD$$

musí platiť:

$$\Delta AS = \Delta AD$$

Druhá rovnica určuje zmenu agregátnej ponuky, zmenu agregátneho dopytu určuje rovnica multiplikátora:

$$cI = \frac{1}{s} \Delta I$$

Po úprave:

$$\frac{\Delta I}{I} = cs$$

Ak predpokladáme, že pomer investícií a produktu (resp. agregátneho dopytu) je konštantný (čo pri predpoklade $AS = 0 \Leftrightarrow I = 0$ vyplýva z rovnice multiplikátora), tempo rastu produktu musí byť rovnaké ako tempo rastu investícií

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{I} = cs$$

Keďže konštanta *c* je vlastne obrátenou hodnotou kapitálového koeficientu (porovnajme rovnicu akcelerátora a rovnicu $\Delta AS = cI$) získavame:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{I} = \frac{s}{\theta}$$

Oba modely sú teda totožné. Dôležitým záverom je, že *miera úspor a kapitálový koeficient* determinujú jedinú hodnotu tempa rastu produktu, ktorá zabezpečí rovnosť úspor a investícií a agregátneho dopytu a agregátnej ponuky.

Príloha 2: Riešenie Ramsey-Cass-Koopmans modelu

Nasledujúci výklad sleduje publikáciu Krueger, 2002.

Funkciu užitočnosti odvodíme z tzv. CRRA (constant relative risk aversion) funkcie užitočnosti v tvare:

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

Keďže $1/(1-\sigma)$ je konštanta môžeme funkciu užitočnosti zapísať ako:

$$U(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Ďalej platí

$$e^{-\rho t} U(c) = e^{-\rho t} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} = e^{-\rho t} \frac{(\chi e^{gt})^{1-\sigma}}{1-\sigma} = e^{(\rho - g(1-\sigma))t} \frac{\chi^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

kde χ je spotreba na jednotku efektívnej práce $\chi = C / Le^{gt} = c / e^{gt}$. Ak zadefinujeme $\hat{\rho} = \rho - g(1-\sigma)$ môžeme zapísať funkciu užitočnosti „dynastie“ (ktorá mapuje užitočnosť domácnosti, ktorá žije v prvom skúmanom období a všetkých jej potomkov):

$$u = \int_0^\infty e^{\hat{\rho} t} \frac{\chi^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$

Z funkcie akumulácie kapitálu $\dot{K} = Y - C - \delta K$ odvodíme analogicky ako pri Solow-Swan modeli funkciu akumulácie pre efektívnu kapitálovú vybavenosť:

$$\dot{\kappa} = f(\kappa) - (\delta + n + g)\kappa - \chi$$

Maximalizačnou úlohou je teda:

$$\max u = \int_0^\infty e^{\rho t} \frac{(\chi)^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$

Pod obmedzením:

$$\dot{\kappa} = f\left(\kappa\right) - \left(\delta + n + g\right)\kappa - \chi$$

Riešenie tohto problému získame sformovaním Hamiltonovej funkcie:

$$H(t,\kappa,\chi,\lambda) = e^{-\hat{\rho}t}\frac{\chi\left(t\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda\left(t\right)\left[f\left[\kappa\left(t\right)\right] - \left(\delta + n + g\right)\kappa\left(t\right) - \chi\left(t\right)\right]$$

kde λ je adjungovaná premenná.

Podmienky rovnováhy sú:

1. $\dfrac{dH(t,\kappa,\chi,\lambda)}{d\chi} = 0 \Leftrightarrow e^{-\hat{\rho}t}U'(\chi) = \lambda$

2. $\dot{\lambda} = -\dfrac{dH(t,\kappa,\varsigma,\lambda)}{d\kappa} \Leftrightarrow \dot{\lambda} = -\left[f'\left(\kappa\right) - \left(\delta + n + g\right)\right]\lambda$

3. $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda\left(t\right)\kappa\left(t\right) = 0$ - podmienka transversality

Derivovaním prvej podmienky podľa času získavame:

$$\dot{\lambda} = e^{-\hat{\rho}t}U''\left(\chi\right)\chi' - \hat{\rho}e^{-\hat{\rho}t}U'(\chi)$$

Kombináciou s prvou podmienkou ďalej odvodzujeme predpis pre tempo rastu adjungovanej premennej:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{U''\left(\chi\right)\chi'}{U'(\xi)} - \hat{\rho}$$

Uvedenú rovnosť kombinujeme s druhou podmienkou:

$$\frac{U''\left(\chi\right)\chi'}{U'\left(\chi\right)} = -\left[f'\left(\kappa\right) - \left(\delta + n + g + \hat{\rho}\right)\right]$$

Keďže $\dot{\chi} \equiv \chi'$ získavame:

$$\dot{\chi}\frac{U''\left(\chi\right)\chi}{U'\left(\chi\right)} = -\left[f'\left(\kappa\right) - \left(\delta + n + g + \hat{\rho}\right)\right]\chi$$

Získavame teda druhú dynamickú rovnicu systému, ktorá vysvetľuje zmenu spotreby v čase:

$$\dot{\chi} = \frac{1}{\sigma}\left[f'\left(\kappa\right) - \left(\delta + n + g + \hat{\rho}\right)\right]\chi$$

Dynamické rovnice v tempách rastu môžeme zapísať ako:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{f(\kappa)}{\kappa} - (\delta + n + g) - \frac{\chi}{\kappa}$$

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\kappa) - (\delta + n + g + \hat{\rho})\right]$$

Pre Cobb-Douglasovú produkčnú funkciu platí:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = A\kappa^{\alpha-1} - (\delta + n + g) - \frac{\chi}{\kappa}$$

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{1}{\sigma}\left[A\alpha\kappa^{\alpha-1} - (\delta + n + g + \hat{\rho})\right]$$